

*Printed at the Mathematical Centre, 413 Kruislaan, Amsterdam.*

*The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.).*



**LEERGANG BESLISKUNDE**

**DEEL 5**

**INLEIDING TOT DE MATHEMATISCHE BESLISKUNDE**

**DOOR J. KRIENS G. DE LEVE**

---

**MC SYLLABUS 1.5**

**MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM 1982 3e DRUK**

ISBN 90 6196 018 5

Eerste druk 1966

Tweede herziene druk 1971

Derde druk 1981

## Inhoud

|                                                                                                 |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                                                                                                 | blz. |
| Voorwoord                                                                                       | 1    |
| 1. Inleiding                                                                                    | 3    |
| 2. Het beschrijven van beslissingsproblemen                                                     | 6    |
| 3. Het wiskundig beschrijven van beslissingsproblemen                                           | 15   |
| 4. Is een besliskundige benadering altijd zinvol?                                               | 25   |
| 5. Indeling van het gedeelte besliskunde                                                        | 35   |
| 6. Enige voorbeelden                                                                            | 39   |
| 7. Het economisch beslissingsprobleem inzake de beveiliging van<br>Nederland tegen stormvloeden | 82   |
| 7.1. De frequentielijn van de hoogwaterstanden te<br>Hoek van Holland                           | 82   |
| 7.2. De optimale hoogte van onze dijken                                                         | 96   |
| Literatuur                                                                                      | 119  |



Voorwoord bij de eerste druk

De vereiste basiskennis voor dit en de hierna volgende deeltjes van de Leergang Besliskunde wordt behandeld in de deeltjes 1.1 t/m 1.4.

In dit deel zal eerst worden aangegeven wat de beide auteurs onder besliskunde verstaan, waarbij onder andere wordt ingegaan op de vraag of een besliskundige aanpak altijd zinvol is. Daarna zullen enige eenvoudige beslissingsproblemen worden besproken die met de reeds eerder beschreven hulpmiddelen kunnen worden opgelost. Met een uitvoerige bespreking van het probleem van de bepaling van de optimale dijkhoogte wordt dit deeltje besloten.

De schrijvers zijn dank verschuldigd aan Drs. B. DORHOUT, die zo vriendelijk was het manuscript door te lezen en verbeteringen voor te stellen.

Amsterdam, 1966

De auteurs

Voorwoord bij de tweede druk

De tekst van deze tweede druk is grotendeels ongewijzigd gebleven. Alleen op de plaatsen, waar duidelijke onjuistheden waren vermeld, zijn verbeteringen aangebracht.

Amsterdam, 1971

De auteurs





## 1. Inleiding

Het zal slechts weinigen zijn ontgaan dat er situaties bestaan waarin beslissingen moeten worden genomen. Van een groot aantal beslissingen zijn wij ons evenwel niet bewust, omdat, gezien onze instelling en ervaring, de te nemen beslissingen zo vanzelfsprekend of van zo'n ondergeschikt belang zijn, dat zij zonder enig nadenken kunnen worden genomen.

Er bestaan echter ook situaties waarin wij niet zonder gevoelens van twijfel een keuze maken uit de verschillende mogelijkheden. Naarmate de situatie waarin men moet beslissen ingewikkelder wordt van structuur, naarmate de tijd beschikbaar om tot een beslissing te komen korter wordt, ontstaat de behoefte aan een minder intuïtieve werkwijze. In dit deeltje wordt nagegaan in hoeverre de beslis-kunde aan deze behoefte kan voldoen.

In de meeste beslissingssituaties kan de te nemen beslissing, met een beetje goede wil, gezien worden als een poging om een verandering aan te brengen in een ongewenste toestand of ontwikkeling. Om een keuze te kunnen maken uit de collectie van mogelijke beslissingen, is het dikwijls noodzakelijk dat men zowel de toestand waarin de beslissing moet worden genomen, als de - uit deze beslissing voortvloeiende - ontwikkeling op één of andere wijze kan aangeven.

In de natuurwetenschappen probeert men dikwijls met veel succes de waargenomen verschijnselen te beschrijven met behulp van wiskundige begrippen. Een groot deel van het instrumentarium van de wiskundige wordt dienstbaar gemaakt om de waargenomen of hypothetische samenhang tussen verschijnselen aan te duiden. Uit onze middelbare-schooljaren kennen wij nog de relaties:

$$\frac{PV}{T} = R = \text{constant} \quad (\text{wet van Boyle - Gay-Lussac}),$$

in woorden: druk (P) maal volume (V) is evenredig met de temperatuur (T),  
en

$$V = ir \quad (\text{wet van Ohm}),$$

in woorden: spanningsverschil (V) is stroomsterkte (i) maal weerstand (r).

Bovendien herinneren wij ons nog wel de uitspraak (1<sup>ste</sup> wet van Kepler): "De baan van een planeet om de zon kan worden beschreven met behulp van een ellips met de zon in één van de brandpunten".

Relaties van dit type en andere wiskundige uitdrukkingen vormen tezamen het zg. mathematisch model van het beschouwde fenomeen. In tegenstelling tot andere modellen (beschrijvingsvormen van een situatie) zoals etalagepoppen, maquettes, etc. mist het mathematisch model de fysische gelijkenis met haar object.

Gelijk in elk ander model krijgt alleen dat wat de waarnemer opmerkt en op een bepaald moment karakteristiek vindt, zijn plaats in het mathematisch model. In de wet van Boyle - Gay-Lussac wordt niet gesproken over de vorm van het volume. In de eerste wet van Kepler wordt de - voor aardse begrippen redelijke - omvang van de zon samengeperst in een punt zonder afmetingen. Verder zal de waarnemer zijn gebrek aan kennis dikwijls aanvullen met veronderstellingen die niet vervuld behoeven te zijn.

Het mathematisch model geeft dus in principe een onvolledig en misschien zelfs een onjuist "wiskundig" beeld van de beschouwde situatie. Het gebeurt dan ook vaak dat het gangbare mathematisch model na het verkrijgen van meer informatie vervangen dient te worden. Dit laatste geschiedde bij het model van Boyle - Gay-Lussac. Een aantal gassen vertoonden bij hoge druk belangrijke afwijkingen van de gelijknamige wet. Van der Waals verkoos voor die gevallen het iets afwijkende model

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2},$$

waarbij  $a$ ,  $b$  en  $R$  constanten zijn.

Met behulp van een mathematisch model kunnen wij hypothesen toetsen, voorspellingen doen en zoals wij straks zullen zien beslissingen aanwijzen.

Ook in vele niet-natuurwetenschappen kan deze werkwijze zijn nut afwerpen. De toepassingen in de Psychologie en de Economie hebben geleid tot jonge wetenschappen: de Psychometrie en de Econometrie.

Ook in situaties waarin beslissingen genomen moeten worden kan men dikwijls de samenhang tussen de relevante factoren op een wiskundige

wijze uitbeelden. In een dergelijke aanpak probeert men, door invoering van een mathematisch model van de beslissingssituatie, het beslissingsprobleem te vertalen in een wiskundig probleem en wel een wiskundig optimumprobleem.

De oplossing van het wiskundig probleem geeft dan na terugvertalen een aanwijzing hoe het oorspronkelijke beslissingsprobleem moet worden opgelost. Ook nu dient men zich ervan bewust te zijn dat de gevonden beslissing uiteindelijk afhangt van de keuze van het mathematisch model. Dikwijls wordt deze keuze geleid door de wens om na vertaling een wiskundig optimumprobleem te verkrijgen dat oplosbaar is.

In deze leergang wordt met Besliskunde die studie aangeduid welke zich bezighoudt met het streven om beslissingsproblemen op deze wijze op te lossen: d.w.z. door eerst een mathematisch model van de beslissingssituatie te maken, door vervolgens het - uit het beslissingsprobleem voortgekomen - wiskundig optimumprobleem op te lossen en door tenslotte de gevonden oplossing terug te vertalen in de taal van de beslissingssituatie.

De meeste toepassingen van de besliskunde komen uit de bedrijfs-economische sector. Dit neemt echter niet weg dat ook in andere gebieden van het menselijk handelen de besliskunde haar bijdrage kan leveren tot de oplossing van beslissingsproblemen. Enige van de eerste toepassingen van de besliskunde lagen bijv. op militair terrein. Een besliskundig onderzoek zal in het algemeen een bundeling zijn van uiteenlopende activiteiten, zoals marktonderzoek, tijdstudies, wiskundige research, etc. Het onderscheidt zich van ieder ander onderzoek doordat het gericht is op de vertaling van het beslissingsprobleem in een wiskundig optimumprobleem. De theorie welke zich, binnen het mathematisch model, bezighoudt met dit type van optimumproblemen zullen wij in het vervolg aangeven met Mathematische Besliskunde.

Keren wij thans terug tot de in het begin van deze paragraaf gemaakte opmerking waarin melding wordt gemaakt van een behoefte aan een minder intuïtieve werkwijze.

In de volgende paragraaf zullen wij aan de hand van een aantal beslissingsproblemen nagaan welke wensen men koestert met betrekking

tot zo'n werkwijze.

In paragraaf 3 zullen wij laten zien, dat de hierboven genoemde benadering in principe aan deze wensen tegemoet kan komen. In die paragraaf komt tevens tot uitdrukking hoe de vertaling van het beslissingsprobleem in een wiskundig probleem verloopt.

In paragraaf 4 zullen wij ons echter afvragen wanneer het wel en wanneer het niet zinvol is om de hulp van de wiskunde in te roepen.

In paragraaf 5 zal een indeling worden gegeven van de besliskunde zoals deze in de leergang wordt gevolgd.

In paragraaf 6 worden enige elementaire beslissingsproblemen behandeld, die met de reeds besproken wiskundige en statistische methoden kunnen worden opgelost.

In paragraaf 7 volgt een uitvoerige behandeling van het beslissingsprobleem rond onze zeedijken.

## 2. Het beschrijven van beslissingsproblemen

In deze paragraaf zullen wij eerst een vijftal beslissingsproblemen formuleren. Onder deze problemen bevindt zich slechts één, dat op een ondubbelzinnige wijze kan worden opgelost. De formulering van de overige problemen is nog niet geheel rond. Noodzakelijke gegevens ontbreken nog.

### Voorbeeld 2.1

Een fabrikant wil veevoeder op de markt brengen dat verkregen wordt door een aantal grondstoffen in een geschikte verhouding te mengen. Hij koopt daartoe elke vrijdag zoveel grondstoffen in als nodig is voor de produktie van de komende week. In tabel 2.1 vindt men behalve de gedeeltelijke samenstelling van grondstoffen ook hun prijzen vermeld.

Aan de samenstelling van het veevoeder zijn enkele eisen gesteld. Deze restricties worden aangegeven in tabel 2.2.

Tabel 2.1

Gegevens over beschikbare grondstoffen

|                         | percentages |                               |            |            |              |                      | prijs in<br>guldens/<br>100 kg |
|-------------------------|-------------|-------------------------------|------------|------------|--------------|----------------------|--------------------------------|
|                         | vocht       | verteer-<br>baar ruw<br>eiwit | ei-<br>wit | ruw<br>vet | zet-<br>meel | ruwe<br>cel-<br>stof |                                |
| rogge                   | 9,5         | 6,6                           | 7,9        | 1,2        | 49,7         | 1,7                  | 22,75                          |
| milocorn                | 8,5         | 5,7                           | 7,4        | 2,3        | 52,1         | 2,4                  | 22,35                          |
| paardebonen             | 10,0        | 15,4                          | 17,5       | 1,0        | 46,9         | 5,6                  | 30,25                          |
| sojaschroot             | 8,1         | 29,8                          | 33,0       | 0,6        | 48,9         | 4,5                  | 38,25                          |
| cocoskoeken             | 7,1         | 11,8                          | 14,0       | 7,0        | 54,7         | 11,5                 | 32,50                          |
| palmpitschroot          | 8,1         | 12,7                          | 13,2       | 1,8        | 43,0         | 18,0                 | 26,50                          |
| negerzaad-<br>schilfers | 7,3         | 20,2                          | 22,8       | 3,6        | 41,7         | 12,2                 | 32,50                          |

Tabel 2.2

Eisen opgelegd aan de samenstelling van het veevoeder

| ingrediënten          | maximaal<br>percentage | minimaal<br>percentage |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| rogge                 | 20                     |                        |
| milocorn              | 15                     |                        |
| paardebonen           | 7                      |                        |
| sojaschroot           |                        | 5                      |
| cocoskoeken           |                        | 2                      |
| palmpitschroot        |                        | 8                      |
| negerzaadschilfers    | 10                     |                        |
| vocht                 | 8,6                    |                        |
| verteerbaar ruw eiwit |                        | 12                     |
| eiwit                 |                        | 14,7                   |
| ruw vet               |                        | 1,8                    |
| zetmeel               |                        | 42                     |
| ruwe celstof          | 8,4                    |                        |

De mengverhouding zal nu zo moeten worden gekozen dat bijv. het totale eiwitgehalte, resulterend uit de diverse bijdragen, minimaal 14,7% is. Op overeenkomstige wijze zullen ook de overige eisen aan de samenstelling van het veevoeder (tabel 2.2) beperkingen opleggen.

Uiteraard zal men trachten het produkt met de hiervoor aangegeven eigenschappen zo goedkoop mogelijk te produceren. De ondernemer wil, rekening houdend met de prijzen der grondstoffen, die mengverhouding kiezen, waarbij tegen zo laag mogelijke totale kosten aan grondstoffen een produkt met de vereiste eigenschappen wordt verkregen.

Heeft hij dit probleem opgelost en blijven zowel de samenstellingen als de prijzen van de grondstoffen constant, dan weet hij voor eens en voor altijd in welke gewichtsverhouding hij zijn grondstoffen zal moeten inkopen.

Zijn de prijzen en/of de samenstellingen van de grondstoffen aan wijzigingen onderhevig dan zal de mengverhouding steeds moeten worden aangepast.

#### Voorbeeld 2.2

Een automobilist heeft een schadeverzekering afgesloten. In de bijbehorende polis worden o.a. de volgende voorwaarden vermeld:

- 1) De looptijd van de verzekering is één jaar. Aan het eind van ieder jaar kan zij worden verlengd. De premie moet aan het begin van ieder premie-jaar worden voldaan.
- 2) De premie bedraagt f.320,-, tenzij
  - a) in de voorafgaande periode van één jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie f.280,-, tenzij
  - b) in de voorafgaande periode van twee jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie f.240,-, tenzij
  - c) in de voorafgaande periode van drie jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie f.220,-.
- 3) Indien men een schade wil claimen dient dit onmiddellijk te geschieden. Slechts het verschil tussen de schade en een vast bedrag van f.80,-, het zg. eigen risico, wordt door de verzekering uitbetaald.

Gevraagd wordt voor elk tijdstip aan te geven welke schaden geclaimd moeten worden.

Het is duidelijk dat de automobilist nooit een schade van minder dan f.80,- zal claimen. Het is ook duidelijk, dat hij, als nog geen schade is geclaimd dat jaar, met het oog op de premie-reducties voor schade-vrij rijden geen schaden zal claimen, welke slechts een weinig hoger zijn dan het eigen risico. De vraag is nu waar precies de grens ligt tussen de schaden die wel en die niet moeten worden geclaimd. Het behoeft geen betoog, dat de grenswaarden zullen afhangen van de laatst betaalde premie en van het tijdstip in het premiejaar.

#### Voorbeeld 2.3

Een fabriek kan hoogstens drie gelijke machines inschakelen bij de vervaardiging van één produkt. De produktiesnelheden van deze machines afzonderlijk laten zich niet regelen. Voor het produkt geldt dat de gemiddelde vraag per tijdseenheid kleiner is dan de gezamenlijke produktie van drie machines per tijdseenheid. De voorraadcapaciteit is beperkt en bedraagt  $m$  eenheden. De voorraadkosten per tijdseenheid zijn evenredig met de grootte van de voorraad. De produktiekosten per tijdseenheid worden mede bepaald door het aantal ingeschakelde machines. Het omschakelen naar hogere of lagere produktiesnelheden brengt extra kosten met zich mee, die afhangen van de volgorde van het betreffende tweetal produktiesnelheden. Indien de voorraad niet toereikend is dan worden de gevraagde goederen geleverd via een zusterfabriek. De tussen beide fabrieken overeengekomen verrekeningsprijs ligt hoger dan de gemiddelde kostprijs.

Gevraagd wordt voor iedere produktiesnelheid (0, 1, 2 of 3 lopende machines), na te gaan bij welke voorraden men moet omschakelen en waarheen.

#### Voorbeeld 2.4

Een inkoper van een speciaalzaak in dameshoedjes gaat ieder najaar naar Parijs om een nieuwe collectie samen te stellen. Deze hoedjes worden dan het volgende voorjaar tussen 1 februari en 1 juli in de normale verkoop gebracht. Tijdens de uitverkoop (1 - 15 juli)

worden de hoedjes tegen een sterk gereduceerde prijs aangeboden. De ervaring leert dat alle restanten in de uitverkoop kunnen worden opgeruimd.

In elk najaar moet de inkoper dus beslissen welke typen en hoeveel van elk moeten worden ingekocht. Hij weet hoeveel overeenkomstige hoedjes in de afgelopen jaren in de normale verkoop zijn verkocht. Bovendien zijn hem de inkoop- en verkoopprijzen bekend.

#### Voorbeeld 2.5

Een meisje hoopt op een uitnodiging voor een studentenbal in het onmiddellijke verschiet. Op een morgen op weg naar college beseft ze dat het er die dag om zal gaan. Zo direct zal ze Peter ontmoeten, een haar zeer toegewijde jongen. Zij geeft zichzelf een grote kans dat hij haar zal uitnodigen. Hij is echter een beetje gierig en zal haar vermoedelijk ter gelegenheid van het bal een corsage van slechts twee gulden aanbieden. Tijdens de lunch zal ze Frank ontmoeten. Als Frank haar vraagt dan komt hij zeker met een corsage van vier gulden voor de dag. In de loop van de middag zal zij op het sportveld René zien. René is tamelijk royaal en zal zeker met een corsage van vijf gulden komen opdraven. De kans dat hij haar vraagt is echter niet zo groot. Eerst 's avonds evenwel ontmoet zij haar idool, Rob. Deze is erg gul en heeft voor het meisje met wie hij uitgaat wel een corsage van acht gulden over. Helaas heeft hij nog veel andere interesses onder de meisjes en de kans op een uitnodiging is zeer gering.

Het meisje begrijpt dat zij bij een eventuele uitnodiging direct moet beslissen en dat zij op een aanvaarding niet mag terugkomen. Ze vraagt zich nu af wat zij die dag moet doen als zij niet alleen naar het bal wil, maar ook zo mooi mogelijk wil verschijnen.

Wanneer men deze voorbeelden met elkaar vergelijkt vertonen zij op het eerste gezicht weinig punten van overeenkomst. Immers het eerste voorbeeld is een mengprobleem, het tweede een verzekeringsprobleem, het derde een produktieprobleem, terwijl het vierde en het vijfde resp. een inkoop- en een "bal"-probleem voorstellen.



De vijf problemen zijn inderdaad qua vorm verschillend, maar dit betekent nog niet dat de wijzen van oplossen verschillend zijn. Een indeling van de beslissingsproblemen in transport-, voorraad-, productie-, vervangingsproblemen, etc. leidt in het algemeen niet tot groepen van beslissingsproblemen met identieke oplossingsmethoden. In paragraaf 3 zullen wij bijv. zien dat in de mathematische modellen een dergelijk fysisch onderscheid niet eens gemaakt wordt. Bovendien verkrijgt men juist een beter inzicht in de structuur van de beslissingssituatie als men in staat is het probleem te formuleren zonder gebruik te maken van begrippen als voorraad, machine, haven, etc. Door invoering van een uniforme karakterisering van het beslissingsprobleem onderkent men identieke oplossingsmogelijkheden voor problemen, welke in hun oorspronkelijke vorm weinig gelijkenis vertoonden.

Door het beslissingsprobleem te lichten uit zijn locale sfeer verschaft men zich dikwijls veel inzicht. Om een uniforme beschrijving van het beslissingsprobleem mogelijk te maken zullen wij een aantal begrippen invoeren. Met behulp van deze begrippen zullen wij tevens trachten het beslissingsprobleem te analyseren. Men merke op dat iedere beschrijving van een beslissingssituatie een model van die situatie weergeeft. Het is immers ondoenlijk om hoe dan ook een situatie in al zijn bijzonderheden te schilderen.

Het object in onze beschouwing zullen wij steeds aanduiden met de naam systeem.

In voorbeeld 2.1 is het systeem "de produktie van veevoeder". Wij bedoelen met de produktie van veevoeder de gehele bedrijvigheid, welke zich rond het mengen afspeelt. In voorbeeld 2.3 wordt het systeem gevormd door de produktie en de voorraad tezamen. In voorbeeld 2.2, 2.4 en 2.5 beschouwen wij resp. de systemen "verzekering", "hoeden-collectie" en "bal".

In handelsondernemingen zal men misschien de voorkeur geven aan de woorden "zaak" of "zaken" boven dat van systeem.

Het tweede begrip waarvan wij ons zullen bedienen is de toestand van het systeem. Immers, zoals uit de voorbeelden blijkt, zal de te nemen beslissing mede afhangen van de toestand waarin het systeem zich

op het moment van beslissen bevindt. Uit de formulering van het beslissingsprobleem kan veelal worden opgemaakt welke factoren voor het vaststellen van die toestand relevant zijn. Het is vaak een zaak van persoonlijke smaak (modelkeuze!) welke factoren wèl en welke factoren niet relevant worden geacht om voor ieder tijdstip de toestand van het systeem te beschrijven. Elke beslisser beschikt over een hoeveelheid informatie die niet gebonden is aan een tijdstip of tijdsinterval. Deze laatste informatie behoeft niet in de toestand van het systeem te worden verwerkt.

In voorbeeld 2.1 kan de toestand van het systeem worden gegeven door

- 1) de huidige samenstelling van het veevoeder;
- 2) de samenstelling van de grondstoffen welke worden aangeboden;
- 3) de prijzen van deze grondstoffen.

In de toestand van het systeem zal men dus niet de kwaliteits-eisen, opgegeven in tabel 2.2, verwerken. Deze eisen zijn niet kenmerkend voor een bepaald moment, aangezien zij altijd worden gesteld.

In ons model wordt de toestand van het systeem in voorbeeld 2.2 bepaald door

- 1) de laatst betaalde premie;
- 2) het tijdstip in het premiejaar;
- 3) het eventueel te claimen bedrag;
- 4) de omstandigheid of de verzekerde dat jaar al eerder een schade heeft geclaimd.

In de toestand van het systeem wordt dus geen plaats ingeruimd voor de in de polis genoemde premiebedragen en het eigen risico. Noch wordt vastgesteld dat men na het claimen van een schade het daaropvolgende jaar weer de hoogste premie moet betalen. Deze gegevens zijn niet kenmerkend voor het beschouwde tijdstip. Zij liggen eens en voor al vast.

De toestand van het systeem in voorbeeld 2.3 wordt wellicht gegeven door

- 1) de voorraad;
- 2) de produktiesnelheid.

In de toestand van het systeem wordt niet aangegeven op welke wijze de klanten aankomen en hun bestellingen afgeven. De aankomsten en de bestellingen van klanten vloeien voort uit een proces dat voor alle tijdstippen tezamen beschreven moet worden (zie derde begrip!).

In voorbeeld 2.4 wordt op het moment van inkopen de toestand van het systeem wellicht gekenmerkt door

- 1) de inkooprijzen;
- 2) de verkoopprijzen.

Wij vinden tenslotte voor het beslissingsprobleem in voorbeeld 2.5 de volgende toestandsgrootheden

- 1) de ontmoeting (Peter, Frank, René of Rob);
- 2) de omstandigheid of zij bij deze ontmoeting wordt uitgenodigd;
- 3) de omstandigheid of zij reeds een uitnodiging heeft aanvaard en zo ja, van wie.

De prijzen van de corsages waren reeds bekend en komen dus in de toestand van het systeem niet voor. De laatste toestandsgrootheid stelt ons in staat om vast te stellen met welk vriendje zij naar het bal gaat.

Het derde begrip dat wij zullen gebruiken heet ontwikkeling in de toestand van het systeem. Bij zeer veel beslissingsproblemen wijzigt zich de toestand van het systeem in de loop van de tijd. De wijze waarop dit geschiedt zal mede de keuze van de te nemen beslissing bepalen. Zowel in voorbeeld 2.1 als in voorbeeld 2.4 brengen prijsfluctuaties toestandsveranderingen teweeg. Schaden en uitnodigingen brengen in voorbeeld 2.2 resp. voorbeeld 2.5 droeve en welkome veranderingen in de toestand van het systeem.

De hiervoor geschetste ontwikkelingen in de toestand van het systeem voltrekken zich min of meer buiten de wil van de beslisser om. Er bestaan echter ook toestandsveranderingen die een direct gevolg zijn van de activiteiten van de beslisser. Zo zal in voorbeeld 2.3 de beslissing die het omschakelen van de produktie ten gevolge heeft uiteraard de toestand van het systeem doen veranderen. Ook in de overige voorbeelden kan men zien hoe beslissingen veranderingen aanbrengen in de toestand van het systeem.

Tegenover al deze ontwikkelingen in de toestand van het systeem staat de beslisser niet geheel onverschillig. Wij komen nu tot het volgende aspect van het beslissingsprobleem. De beslisser zal in het algemeen aan deze ontwikkelingen waarderingen toekennen en wel meestal in de vorm van kosten.

Wij hebben reeds vastgesteld dat de beslisser door het doen van beslissingen de ontwikkelingen in de toestand van het systeem kan beïnvloeden. Zijn beslissingen zullen er dan ook op gericht zijn om door het teweegbrengen van toestandsveranderingen ongunstige ontwikkelingen tegen te gaan.

Indien men bij het zoeken naar een oplossing van een beslissingsprobleem behoefte heeft aan steun, dan zullen de gedachten uitgaan naar methoden die

- 1) de aanwezige of de nog in te winnen informatie over de toestand van het systeem in een te hanteren vorm kunnen uitdrukken;
- 2) de aanwezige of de nog in te winnen informatie over de toekomstige ontwikkelingen in de toestand van het systeem op een overzichtelijke wijze kunnen beschrijven;
- 3) de toegelaten beslissingen op een overzichtelijke wijze kunnen aangeven;
- 4) waarderingen kunnen toekennen aan ontwikkelingen in de toestand van het systeem en daardoor ook aan beslissingen die mede tot deze ontwikkelingen hebben bijgedragen. Het liefst zag men deze laatste waarderingen uitgedrukt in de vorm van een criterium voor het vergelijken van toegelaten beslissingen;
- 5) voor de toestand waarin de beslisser zich bevindt of voor alle toestanden waarin de beslisser kan komen te verkeren, de optimale beslissing kunnen aanwijzen.

### 3. Het wiskundig beschrijven van beslissingsproblemen

Gelijk wij reeds in paragraaf 1 opmerkten laat een niet-wiskundig gebeuren zich wel eens beschrijven met behulp van een wiskundige taal.

De vraag rijst nu of de wiskunde ook over de benodigde instrumenten beschikt als een beslissingssituatie beschreven moet worden. Wij zullen dit nu nagaan aan de hand van de vijf hiervoor geformuleerde wensen. Een eventuele wiskundige beschrijving geeft dan het mathematisch model van de beschouwde situatie weer.

#### Eerste wens

In de toelichting op het begrip "toestand van het systeem" werd verondersteld dat de toestand van het systeem in voorbeeld 2.3 kon worden gegeven door de voorraad en de produktiesnelheid. Beide toestandsgrootheden zijn kwantitatief. Indien wij een assenstelsel invoeren van twee onderling loodrecht op elkaar staande assen (zie figuur 3.1), dan kunnen wij de toestand van het systeem op elk tijdstip aangeven met een punt  $S$  in het coördinatenvlak. Voor het geval de voorraad 200 stuks bedraagt en twee machines zijn ingeschakeld in de produktie wordt de toestand van het systeem aangegeven door het punt  $S_0$  in figuur 3.1.

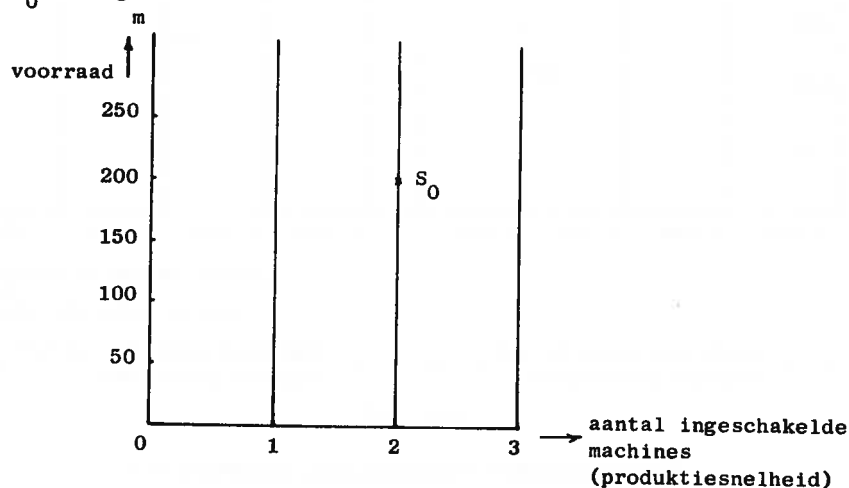


fig. 3.1

Toestandsruimte behorende bij voorbeeld 2.3

Uit deze beschouwing volgt dat de toestand van het systeem in voorbeeld 2.3 steeds kan worden geïdentificeerd met een punt in een vlak.

De toestandsgrootheden van voorbeeld 2.2 worden gegeven door

- 1) de laatst betaalde premie;
- 2) het tijdstip in het premiejaar;
- 3) de eventueel te claimen schade;
- 4) de omstandigheid of er al eerder in het premiejaar een schade is geclaimd of niet.

Zoals in figuur 3.2 is aangegeven hebben de eerste vier intervallen op de horizontale as betrekking op situaties waarin reeds eerder

te claimen  
schade

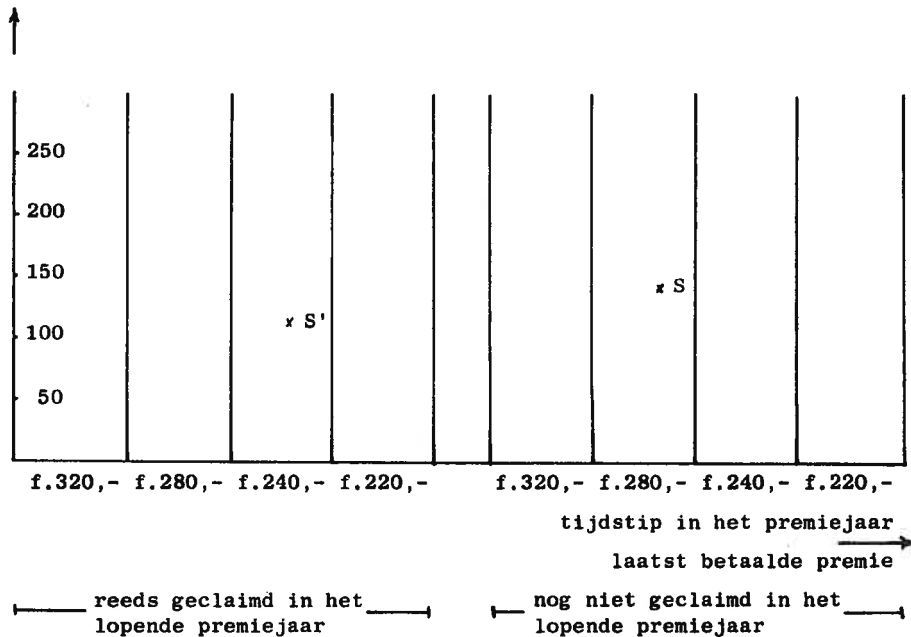


fig. 3.2

Toestandsruimte behorende bij voorbeeld 2.2

in het premiejaar een schade werd geclaimd. Voor de overige intervallen geldt dat de automobilist tot het beschouwde moment schadevrij heeft gereden. Elk interval geeft aan welke premie het laatst werd betaald en hoeveel tijd sindsdien is verstreken. Op de verticale as wordt de te claimen schade uitgezet.

Het punt S in figuur 3.2 geeft de toestand van het systeem aan  $7\frac{1}{2}$  maand na de betaling van een premie van f.280,-. Op dat tijdstip had de verzekerde een schade van f.140,-, terwijl in het toen lopende premiejaar nog geen schade was geclaimd. Het punt S' geeft de toestand van het systeem aan  $6\frac{1}{2}$  maand na de betaling van een premie van f.240,-. Op dat tijdstip had de verzekerde een schade van f.112,-, terwijl in het toen lopende premiejaar reeds een schade was geclaimd.

Ook voor de overige voorbeelden kan men een passende toestandsruimte construeren.

In een wiskundige formulering zal men voor elk tijdstip de toestand van het systeem aangeven met een punt in een één of meerdimensionale Cartesische ruimte  $\mathcal{J}$ . Deze ruimte wordt steeds de toestandsruimte genoemd.

#### Tweede wens

De ontwikkelingen in de toestand van het systeem manifesteren zich in de wiskundige beschrijving door "wandelingen" en "sprongen" van het systeem in de toestandsruimte.

Er bestaan beslissingssituaties waarin de toestand van het systeem zich in het geheel niet wijzigt. Een dergelijke situatie treedt op in voorbeeld 2.1 als de prijzen en samenstellingen van grondstoffen constant blijven. De wandeling is dan ontaard in een "pas op de plaats". Wij blijven ook in dit geval spreken van een wandeling.

Wij hebben reeds opgemerkt dat de wijze waarop de toestand van het systeem zich in de toekomst al of niet zal wijzigen dikwijls van invloed is op de nu te nemen beslissing.

Als de ontwikkelingen in de toestand van het systeem determinis-

tisch van aard zijn, kan men dikwijls gedeelten van de wandeling in de toestandsruimte beschrijven met behulp van "bewegingsvergelijkingen" uit de klassieke mechanica. Indien bijv. op het tijdstip  $t_n$  een voorraad  $s(t_n)$  eenheden groot is en gedurende het tijdsinterval  $(t_n, t_{n+1})$  een constante goederenstroom van  $\alpha$  eenheden per tijdseenheid de voorraad verlaat, wordt de voorraad op een tijdstip  $t$  in het tijdsinterval  $(t_n, t_{n+1})$  gegeven door

$$(3.1) \quad s(t) = s(t_n) - \alpha(t - t_n) .$$

Als de voorraad de enige factor is die de toestand van het systeem karakteriseert, geeft (3.1) de wandeling aan in  $\mathcal{J}$  voor de tijdsperiode  $(t_n, t_{n+1})$ . Relaties van het type (3.1) geven in de klassieke mechanica de nog door het bewegend lichaam af te leggen afstand aan, wanneer de oorspronkelijke afstand  $s(t_n)$ , de snelheid een constante  $\alpha$  en het tijdstip van vertrek  $t_n$  is.

Indien echter de ontwikkelingen in de toestand van het systeem stochastisch van aard zijn, dan maakt het systeem een "verrassingsrit" door de toestandsruimte  $\mathcal{J}$ . In voorbeeld 2.3 (zie figuur 3.1) beklimt het systeem gestadig één van de verticale lijnstukken. Telkens als er een klant binnenkomt valt het weer een stuk terug. Indien de behoefte van de klant van tevoren niet bekend is, maakt het een val van stochastische lengte. Wanneer de beslisser vindt dat het systeem te goed of te slecht klimt, moet het systeem het op dezelfde hoogte op een andere "paal" verder proberen.

In de waarschijnlijkheidsrekening en wel in het bijzonder in de theorie van de stochastische processen weet men dikwijls wel raad met stochastische wandelingen van dit type. Bijgevolg geschiedt de wetenschappelijke beschrijving van deze ontwikkelingen in de toestand van het systeem met behulp van aan deze theorie ontleende begrippen.

### Derde wens

Als derde wens hebben wij geformuleerd de mogelijkheid om de toegelaten beslissingen op een overzichtelijke wijze aan te duiden. In voorbeeld 2.1 wordt de beslissing gegeven door de gekozen percen-



tages van de verschillende grondstoffen in het mengsel. Het percentage rogge in het mengsel zullen wij aangeven met  $x_1$  en dat van milocorn, paardebonden, sojaschroot, cocoskoeken, palmpitschroot en negerzaad-schilfers resp. met  $x_2$  t/m  $x_7$ . In de wiskundige formulering van het beslissingsprobleem kan men de beslissing doorgaans aangeven met een rij van getallen.

Stel dat een beslissing kan worden gegeven door twee getallen  $x'_1$  en  $x'_2$ . Een beslissing  $X' = (x'_1, x'_2)$  kan dan worden geïdentificeerd met een punt in een twee-dimensionale Cartesische ruimte  $\mathcal{X}$  (zie figuur 3.3).

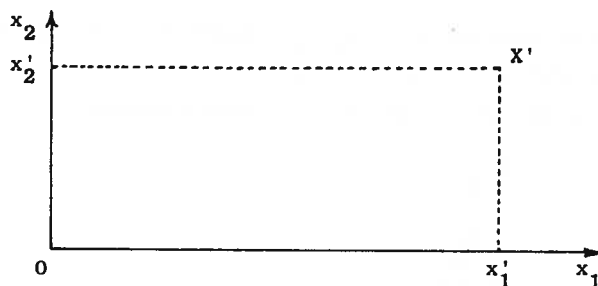


fig. 3.3

Een 2-dimensionale beslissingsruimte  $\mathcal{X}$

Vaak zal men behoefte hebben aan een ruimte van meer dimensies om een beslissing te kunnen vastleggen. Zo'n ruimte noemen wij steeds een beslissingsruimte  $\mathcal{X}$ .

Uit tabel 2.2 in voorbeeld 2.1 volgt dat de beslissingsvariabelen  $x_i$  niet vrij gekozen mogen worden. Zij moeten aan de volgende ongelijkheden voldoen:

$$(3.2) \quad \begin{array}{ll} x_1 \leq 20 & x_5 \geq 2 \\ x_2 \leq 15 & x_6 \geq 8 \\ x_3 \leq 7 & x_7 \leq 10 \\ x_4 \geq 5 & \end{array}$$

Aangezien het eiwit-gehalte minimaal 14,7% moet bedragen, vinden wij bovendien als voorwaarde (zie ook tabel 2.1):

$$(3.3) \quad 7,9x_1 + 7,4x_2 + 17,5x_3 + 33x_4 + 14x_5 + 13,2x_6 + 22,8x_7 \geq 14,7 .$$

Verder gelden voor verteerbaar ruw eiwit, vocht, zetmeel, ruwe celstof en ruw vet analoge ongelijkheden.

Laten wij om de gedachten te bepalen terugkeren tot het geval waarin een beslissing kan worden vastgelegd met behulp van twee beslissingsgrootheden  $x_1$  en  $x_2$  (zie figuur 3.3). Stel vervolgens dat uit de probleemstelling volgt:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

De toegelaten beslissingen  $(x_1, x_2)$  liggen nu in het gearceerde gedeelte van de beslissingsruimte (figuur 3.4). Immers alleen voor punten  $(x_1, x_2)$  in dit gebied gelden alle ongelijkheden.

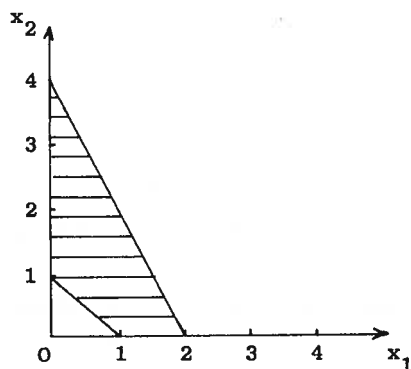


fig. 3.4

Een voorbeeld van een gebied van toegelaten beslissingen in de beslissingsruimte

Evenzo correspondeert met de ongelijkheden in het veevoederprobleem een gebied in de bij dat probleem behorende beslissingsruimte  $\mathcal{X}$ . Dit gebied noemen wij het gebied van de toegelaten beslissingen. Wij merken op dat de getallen 7,9 , 7,4 etc. in (3.3) componenten zijn van de toestand  $S$ . Immers zij geven de huidige samenstelling van de grondstoffen aan. Aangezien (3.3) mede het gebied van de toegelaten

beslissingen bepaalt, zal de vorm van dit gebied afhangen van de toestand  $S$  van het systeem.

Wij zullen in het hierna volgende steeds aannemen, dat het gebied van de toegelaten beslissingen, aangegeven met  $\mathcal{X}_S$ , mede bepaald wordt door de toestand van het systeem op het beslissingstijdstip.

Wij onderscheiden twee typen van beslissingsproblemen. In een zg. één-stapsbeslissingsprobleem heeft de beslisser slechts één enkele beslissing te nemen. In een meer-stapsbeslissingsprobleem wordt van hem verwacht dat hij in een tijdsbestek een reeks van beslissingen neemt. De oplossing van het één-stapsbeslissingsprobleem wijst een beslissing  $X$  aan, terwijl in het meer-stapsbeslissingsprobleem de oplossing meestal wordt gegeven in de vorm van een strategie. Een strategie  $z$  is een beslissingsvoorschrift dat in elke toestand  $S$  aangeeft welke beslissing  $X = z(S)$  moet worden genomen. Wiskundigen zeggen dat een strategie een afbeelding is van de toestandruimte  $\mathcal{S}$  in of op de beslissingsruimte  $\mathcal{X}$ .

#### Vierde wens

Het toekennen van waarderingen aan ontwikkelingen in de toestand van het systeem is dikwijls een zeer moeilijke opgave. Deze waarderingen heeft men nodig om tot een criterium te komen voor het vergelijken van de toegelaten beslissingen. Veelal zijn deze waarderingen niets anders dan de kosten of de winst die aan de beschouwde ontwikkelingen - wandelingen van het systeem door de toestandruimte - zijn verbonden.

Voor één-stapsbeslissingsproblemen wordt het criterium voor de optimale beslissing gegeven in de vorm van een reële  $X$ -functie  $y(S_0; X)$ , waarin  $S_0$  de toestand aangeeft op het moment van beslissen en  $X$  de beslissing. Als de toekomstige ontwikkeling in de toestand van het systeem van te voren bekend is, stelt  $y(S_0; X)$  meestal de totale te maken kosten of opbrengsten voor. Indien echter de toekomstige ontwikkeling op het moment van beslissen nog onbekend is, stelt  $y(S_0; X)$  de verwachting voor van de aan deze ontwikkeling verbonden kosten.

Als wij aannemen dat de weekproduktie veevoeder 10.000 kg bedraagt

wordt in het mengprobleem de X-functie  $y(S_0; X)$  gegeven door

$$(3.5) \quad y = 22,75x_1 + 22,35x_2 + 30,25x_3 + 38,25x_4 + 32,50x_5 + \\ + 26,50x_6 + 32,50x_7 .$$

Uit (3.5) volgt dat  $y$  inderdaad een functie is van  $X$  en dat de gedaante van deze functie mede bepaald wordt door de toestand  $S_0$  van het systeem. Immers de prijzen van rogge etc., die in (3.5) voorkomen, zijn componenten van de toestand  $S_0$ .

#### Vijfde wens

In de inleiding hebben wij gezegd dat ieder besliskundig onderzoek gericht is op de vertaling van het beslissingsprobleem in een wiskundig optimumprobleem. Het beslissingsprobleem uit voorbeeld 2.1 kan men nu vertalen in het volgende optimumprobleem: "Bepaal het minimum van (3.5) onder de bijvoorwaarden (3.2), (3.3), etc.". In zijn algemene vorm luidt het mathematische één-stapsbeslissingsprobleem als volgt:

"Bepaal het minimum van  $y(S_0; X)$  onder de bijvoorwaarden  $X \in \mathcal{X}_{S_0}$ ."

Voor meer-stapsbeslissingsproblemen vindt men een criteriumfunctie van de vorm  $y(S_0; z)$ , waarbij  $S_0$  de begintoestand en  $z$  de toegepaste strategie voorstelt. Indien een optimale strategie moet worden ontworpen voor een onbegrensde tijdsperiode, dan zullen veelal, onverschillig de gebruikte strategie, de totale kosten onbegrensd hoog zijn. Bijgevolg kunnen deze kosten niet dienen als criterium. Zowel voor stochastische als deterministische ontwikkelingen in de toestand van het systeem kan men de kosten gaan verdisconteren. Dat wil zeggen dat men op een voorgeschreven wijze aan kosten in het verre verschiet minder gewicht toekent dan aan kosten van gelijke omvang in de nabije toekomst. Voor een dergelijke handelwijze kan een economische rechtvaardiging bestaan. Voor het geval de ontwikkeling in de toestand van het systeem stochastisch is, zal men gewoonlijk als criterium kiezen de verwachting van de totale verdisconteerde kosten. Voor het geval de ontwikkeling in de toestand van het systeem deterministisch is,

kiest men de verdisconteerde kosten zelf als criterium. In sommige situaties worden de - over de gehele wandeling gemiddelde - kosten per tijdseenheid als criterium gekozen. Hoe dan ook, het mathematische meer-stapsbeslissingsprobleem luidt als volgt:

"Bepaal het minimum van de reële  $z$ -functie  $y(S_0; z)$  onder de bijvoorwaarden  $X = z(S) \in \mathcal{X}_S$  voor elke  $S \in \mathcal{S}$ ".

Voor het bepalen van de extreme waarden van de  $X$ -functie  $y(S_0; X)$  en de  $z$ -functie  $y(S_0; z)$  bestaan een aantal wiskundige technieken.

Tenslotte zullen wij laten zien dat een strategie soms op een anschouwelijke wijze kan worden uitgebeeld.

In voorbeeld 2.2 zal men zodra een schade zich voordoet moeten beslissen of deze schade geclaimd zal worden of niet. In figuur 3.5 hebben wij een strategie aangegeven, die de beslisser adviseert geen schade te claimen wanneer het systeem vanwege die schade een toestand aanneemt in het gearceerde gebied, tenzij reeds eerder in het premiejaar een schade is geclaimd. Uit het voorgaande volgt dat de oplossing te claimen schade

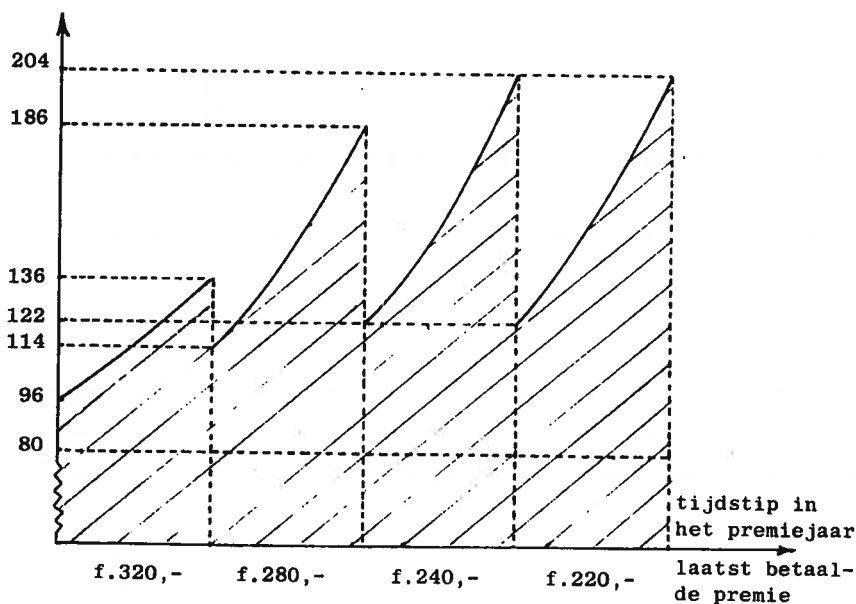


fig. 3.5

Toestandsruimte met aangegeven strategie behorende bij voorbeeld 2.2

van het beslissingsprobleem uit voorbeeld 2.2, besliskundig gezien, een keuze is uit de verzameling van alle mogelijke gearceerde gebieden.

Voor het probleem uit voorbeeld 2.3 wordt in figuur 3.6 een strategie uitgebeeld. Zodra het systeem een toestand aanneemt welke correspondeert met een punt van een dik getrokken lijnstuk, dan wordt de productiesnelheid op de aangegeven wijze veranderd.

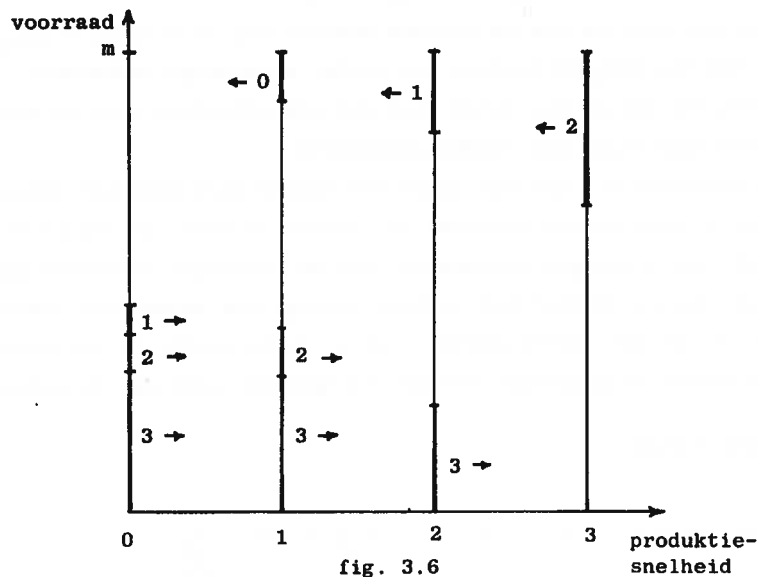


fig. 3.6

Toestandsruimte met strategie behorende bij voorbeeld 2.3

Uiteraard is er ook een strategie denkbaar die een omschakeling van  $3 \rightarrow 1$  voorschrijft.

In bovenstaande beschouwingen hebben wij aan de hand van vijf concrete wensen laten zien, dat de wiskunde over instrumenten beschikt, die bij het zoeken naar oplossingen voor beslissingsproblemen van nut kunnen zijn. Verder hebben wij kunnen constateren dat het gebruik van deze instrumenten leidt tot een vertaling van het beslissingsprobleem in een wiskundig optimumprobleem. Wij hebben niet nagelaten te wijzen op het feit dat elke beschrijving van een beslissingssituatie - ook een wiskundige - een model van die situatie weergeeft. Wij dienen

dus de terugvertaling van het wiskundig optimumprobleem met enige reserve te ontvangen.

In de volgende paragraaf zullen wij nagaan aan welke eigenschappen beslissingsproblemen moeten voldoen opdat zij op een besliskundige wijze kunnen worden behandeld.

#### 4. Is een besliskundige benadering altijd zinvol?

Alhoewel alleen het veevoederprobleem uit paragraaf 2 op een ondubbelzinnige wijze vertaald kon worden in een wiskundig optimumprobleem, mogen wij toch wel vaststellen dat alle beslissingsproblemen uit die paragraaf zich in een vergevorderd stadium van formuleren bevonden. Een beslissingsprobleem maakt in het algemeen een rijpingsproces door. Natuurlijk zijn er ook beslissingsproblemen die vrij plotseling ontstaan. Een machine valt bijv. uit en de beslisser wordt geconfronteerd met de vraag of hij een nieuw exemplaar van het beproefde type zal kopen of dat hij met het oog op eventuele uitbreiding een grotere zal aanschaffen. Het door het probleem opgeroepen beeld van de beslissingssituatie is vrij scherp getekend. Wellicht dat er hier en daar nog wat informatie moet worden ingewonnen; misschien moet er nog wat gerekend worden, maar de verschillende keuzemogelijkheden zijn aangegeven. De meeste beslissingsproblemen worden echter niet in één nacht geboren. Aan de formulering gaat meestal een lange periode van onbehagen vooraf. In zo'n periode zoekt men eerst de schuldige en daarna de oorzaak van de ongewenste toestand. Tot het zoeken naar een remedie komt men niet of pas veel later. Het is merkwaardig hoeveel mensen reeds gerustgesteld zijn, zodra zij weten waarom iets is misgelopen of dreigt mis te lopen. Waarschijnlijk waren zij alleen maar teleurgesteld omdat de verklaring ontbrak. Er ontstaat pas een beslissingssituatie wanneer men het gevoel krijgt dat er ook iets aan gedaan kan worden. Maar wat?

Als wij spreken van een ongewenste situatie dan behoeven wij

nog niet te bedoelen dat de toestand van het systeem ons als onaangenaam voorkomt. Het kan best zijn dat wij die toestand juist gaarne gehandhaafd zouden zien maar dat de ontwikkeling in de toestand van het systeem ons zorgen baart. In het beslissingsprobleem gaat men dan uit van de veronderstelling dat door het nemen van beslissingen een gevreesde ontwikkelingsgang kan worden omgebogen.

Een besliskundige aanpak impliceert de invoering van een mathematisch model. Een mathematisch model van een beslissingssituatie vereist een kwantitatieve beschrijving van

- a) de toestand van het systeem,
  - b) de mogelijke beslissingen,
  - c) de ontwikkelingen in de toestand van het systeem die mede een gevolg zijn van de te nemen beslissingen,
  - d) de waardering die men toekent aan deze ontwikkelingen in de toestand van het systeem,
  - e) de waardering die men toekent aan een beslissing of strategie.
- Deze laatste waardering noemt men het criterium voor de optimale beslissing of strategie. Tussen de waarderingen genoemd onder d) en e) bestaat een zeer nauw verband.

Na deze beschrijvingen volgt het opstellen van het wiskundig optimumprobleem. Tenslotte zal gezocht moeten worden naar een techniek om het wiskundig optimumprobleem te kunnen oplossen. Dit werkschema kan men niet punt voor punt afwerken. Zo kan men bijv. bij het beschrijven van de ontwikkelingen in de toestand van het systeem ontdekken dat men de toestand van het systeem beter op een andere wijze had kunnen aangeven. Ook gebeurt het wel eens dat slechts één of een combinatie van een klein aantal toestandsgrootheden bij de bepaling van de optimale beslissing een rol spelen. In dat geval had men kunnen volstaan met een toestandsruimte van eenvoudiger structuur. Bijgevolg keert men dan tot dat punt van het werkschema terug. Eigenlijk wordt er aan alle punten min of meer tegelijk gewerkt.

Men zal dus tijdens het oplossen van het beslissingsprobleem meer dan eens moeten nagaan welke factoren in het begrip toestand dienen te worden opgenomen, opdat in dat stadium van oplossen



relevant geachte informatie kan worden verwerkt. Een aantal van deze factoren zijn mogelijkwerwijs niet kwantitatief, maar kunnen wel kwantitatief gemaakt worden. Men denke bijv. aan factoren die eigenlijk een vraag inhouden welke met ja of neen moet worden beantwoord. Zulke factoren laten wij doorgaans de waarden 0 (ja) en 1 (neen) aannemen. Het behoeft geen betoog dat van vele systemen de mogelijke toestanden zich niet op een kwantitatieve wijze laten beschrijven. Hoe zou men bijv. de toestand (of sfeer) van een systeem "vergadering" kwantitatief moeten aangeven? Door het aantal aanwezigen? Of door het verschil tussen de aantallen keren instemmend en honend lachen? Alhoewel er geen objectieve maatstaven bestaan met behulp waarvan men ondubbelzinnig kan vaststellen of de toestanden van een bepaald systeem zich wel of niet kwantitatief laten beschrijven, kan men toch stellen dat, als de factoren met de gewenste kwantitatieve eigenschap op een geforceerde wijze naar boven komen, men wellicht beter van een besliskundige aanpak kan afzien. Met het oog op het aangeven van de ontwikkelingen in de toestand van het systeem zal men tevens moeten trachten het aantal beschrijvende factoren zo klein mogelijk te houden.

Laten wij vervolgens onze aandacht richten op de beslissingen. Welke beslissingen kan men alzo nemen? Het antwoord op deze vraag verlangt dikwijls een onderzoek naar de mogelijkheden om het proces te beïnvloeden. Afhankelijk van de toestand van het systeem zullen aan deze mogelijkheden beperkingen zijn opgelegd. Vanwege de beperkte voorraadcapaciteit zal men in voorbeeld 2.3, op grond van het gekozen model, de productie moeten stilleggen als de voorraad m bedraagt. Het onderzoek naar de mogelijke wijzen van beïnvloeding is uiterst belangrijk. Misschien heeft het ten gevolge gehad, dat een nieuwe grondstof aan het reeds bekende pakket van toegelaten grondstoffen voor veevoerders is toegevoegd.

Men moet zich echter wel rekenschap geven van het feit dat voor iedere beslissing of strategie moet gelden dat, binnen zekere grenzen van nauwkeurigheid, de - mede door deze beslissing of strategie opgeroepen - ontwikkeling in de toestand van het systeem kan worden

aangegeven. Dit geldt ook voor beslissingen en strategieën die nog nooit eerder zijn toegepast en waarvoor dus van de bijbehorende ontwikkelingen in de toestand van het systeem geen waarnemingen beschikbaar zijn. Dit betekent dat men bij het bepalen van het effect van een beslissing op de ontwikkeling in de toestand van het systeem te werk moet gaan volgens een gepostuleerd principe, dat wij in deze paragraaf het "resultante-principe" zullen noemen. Het resultante-principe gaat uit van de veronderstelling dat er een basisproces bestaat, hetwelk zich niet laat beïnvloeden door de beslisser. De ontwikkeling in de toestand van het systeem, die mede een gevolg is van een toegepaste strategie, kan, volgens het "resultante-principe", met behulp van het basisproces, de toegepaste strategie en een stel - van elke strategie onafhankelijke - richtlijnen, worden bepaald. Indien men behoefte heeft aan een visuele voorstelling, dan kan men dit basisproces zien als een stevige bries op een meer. Een zeilboot in de toestandsruimte (meer) vervult in die voorstelling de rol van systeem. De beslisser is de zeiler en de gang van de boot is de ontwikkeling in de toestand van het systeem. De gang van de boot is een gevolg van het basisproces (de bries) en de (zeil-)strategie van de zeiler. De bries zal door het gedrag van de zeiler niet aanwakkeren of afnemen. Indien men beschikt over enige zeilkennis (richtlijnen) dan kan men de gang van de boot door een superpositie van strategie op basisproces bepalen. Bij een constante bries is de gang nagenoeg deterministisch, terwijl de boot een "stochastische gang" zal maken, wanneer er op aselechte tijdstippen windvlagen optreden.

Indien wij het "resultante-principe" willen toepassen, dan zullen wij uiteraard enige model-veronderstellingen moeten maken. Wij zullen dit nu toelichten aan de hand van de voorbeelden 2.2 en 2.3.

Bij voorbeeld 2.3 gaan wij uit van de volgende model-veronderstellingen

- 1) het aankomstpatroon van de klanten hangt niet af van de ervaringen die deze klanten hebben opgedaan in hun relatie met de fabriek;
- 2) de door de klanten gestelde vraag naar goederen hangt niet af van de ervaringen die deze klanten hebben opgedaan in hun relatie met de fabriek.

Bijgevolg zal het proces dat, binnen het mathematisch model, de vraag naar goederen beschrijft niet afhangen van de te volgen strategie. Een realisering van dit proces kan men geven door de tijdstippen waarop de klanten binnen kwamen en de op die tijdstippen gestelde vraag naar goederen te noteren. Indien wij nu op grond van waarnemingen in staat zijn zo'n vraagproces te beschrijven, dan ligt voor iedere strategie en iedere realisering van het proces de te maken wandeling in de toestandruimte vast (zie figuur 3.6).

In het autoverzekerings-probleem kampt de automobilist-verzekerde eerst met de moeilijkheid dat hij te weinig waarnemingen heeft. Indien hij doorgaans veel ongelukken maakt, kan hij misschien spoedig over een schat van gegevens beschikken. Hij zal zich dan ongetwijfeld gaan bezighouden met de vraag of het ontstaan van schaden al of niet bevorderd wordt door de reeds verkregen premiereducties. Indien het gestelde niet statistisch aantoonbaar is, d.w.z. indien het aantal premie-reducties geen aantoonbare invloed heeft op de rijtrant, dan zal hij willen nagaan of er een verband bestaat tussen opeenvolgende ongelukken. Wanneer na een nadere precisering een dergelijk verband niet statistisch aantoonbaar is (mathematische statistiek), dan kan hij misschien veronderstellen dat

- 1) de tijdslengten tussen opeenvolgende ongelukken onafhankelijk verdeeld zijn volgens een zelfde negatief-exponentiële verdeling;
- 2) de opeenvolgende schaden onafhankelijk verdeeld zijn volgens een zelfde verdeling van gegeven type.

De parameterwaarden behorende bij deze kansverdelingen moeten uit het waarnemingsmateriaal worden geschat. Al deze veronderstellingen zijn model-veronderstellingen en kunnen al of niet gecombineerd worden getoetst (mathematische statistiek).

Als beide bovengenoemde veronderstellingen niet behoeven te worden verworpen dan volgt uit het eerder genoemde "resultante-principe" dat, ook als de automobilist een strategie volgt, de ontwikkeling in de toestand van het systeem binnen het mathematisch model vast ligt. Immers het proces dat voor de ongelukken zorgt is nu het basisproces en kan worden beschreven met behulp van twee kansverdelingen. De

aselecte trekkingen uit de eerste kansverdeling geven de tijdslengten tussen de opeenvolgende ongelukken aan, terwijl de aselecte trekkingen uit de tweede kansverdeling de bijbehorende schadebedragen opleveren. Voor elke strategie van het beschouwde type (zie figuur 3.5) is nu de ontwikkeling in de toestand van het systeem vastgelegd.

Indien de gemaakte veronderstellingen moeten worden verworpen dan zal men tot een ingewikkelder beschrijvingswijze moeten komen. Bijgevolg zal de automobilist over veel meer waarnemingen moeten beschikken. Deze waarnemingen zal hij misschien nodig hebben om er achter te komen wat het effect is van de te betalen premie op het ontstaan van schaden. Het verzamelen en het verwerken van deze waarnemingen kost uiteraard veel tijd. Tot een sneller resultaat komt een bedrijf met een homogeen wagenpark, waarvan een groot aantal automobilisten gebruik maakt. Indien de automobilisten steeds op een aselecte wijze een auto kiezen (model-veronderstelling) en indien de schaden steeds volledig worden hersteld dan is het enerzijds aannemelijk dat voor iedere auto afzonderlijk aan de gemaakte veronderstellingen is voldaan, terwijl anderzijds over de benodigde gegevens sneller kan worden beschikt.

Wij zullen thans het "hoedjesprobleem" (voorbeeld 2.4) aan een beschouwing onderwerpen, omdat hier in eerste instantie geen beroep op het zg. "resultante-principe" kan worden gedaan. Op het moment van inkoop beschikt de inkoper over de verkoopcijfers van de afgelopen jaren. Misschien heeft hij ook een marktonderzoek onder zijn klanten verricht. Mogelijkerwijs gaf dit onderzoek enig inzicht in de wensen van zijn toekomstige kopers. Indien hij slechts één type hoedje gaat verkopen dan kan hij wellicht met enig succes een kansverdeling van de toekomstige vraag construeren. Moeilijker wordt het wanneer hij meerdere typen hoedjes gaat aanbieden. De dames gaan nu kiezen uit de collectie en als het gewenste type is uitverkocht zijn er twee mogelijkheden:

- 1) zij kopen een ander hoedje;
- 2) zij verlaten de winkel zonder nieuwe hoed.

Bijgevolg stimuleert, binnen één seizoen, een uitverkocht type de

de verkoop van de andere typen. Dit betekent dat de kansverdeling van de vraag naar een bepaald type niet alleen afhangt van de omvang en indeling van de collectie als geheel en dus van de genomen beslissing, maar ook van de geneigdheid bij de klant om iets anders te kopen. Dit laatste kan men niet zomaar in een "resultante-principe" verwerken. Nu kan men een model maken van het verkoopproces door de dames op één of andere aselechte wijze de winkel te laten binnenkomen en ze daarna op een aselechte wijze te laten trekken uit een urn met briefjes, waar- op of het model van het te kopen hoedje staat of wordt aangeraden de winkel te verlaten. De parameters van beide kansmechanismen kan men laten variëren met de tijd (seizoen-invloed) en de aanwezige voorraden hoedjes. Met behulp van deze variatiemogelijkheid kunnen wij trachten de reactie van de klant op de resterende collectie te beschrijven. Het antwoord op de vraag: "Hoe moeten wij variëren?" vereist echter een aparte studie. Bij een dergelijke studie zal waarschijnlijk de hulp van een psycholoog onontbeerlijk zijn. Het blijft de vraag of zo'n urn-model een aanvaardbaar beeld van de werkelijkheid geeft en of de waarden van de parameters van dit model met behulp van de ter beschikking staande gegevens geschat kunnen worden. Bij het vaststellen van de toestand van het systeem "hoedencollectie" hebben wij alleen aan het tijdstip van inkoop gedacht. Voor het bepalen van de winst en dus voor het toekennen van een waardering aan de te maken wandeling, is het wenselijk om ook voor ieder type hoedje het aantal resterende hoedjes in de toestand van het systeem op te nemen. Het urn-model met zijn variërende samenstelling geeft nu tussen twee inkopen de ontwikkeling in de toestand van het systeem op een ondubbelzinnige wijze aan. Assortiments-problemen van dit type zijn moeilijk te beschrijven en op te lossen.

Bij de beschrijving van de ontwikkelingen in de toestand van het systeem kunnen zich uiteraard ook andere moeilijkheden voordoen. Om in het "balprobleem" (voorbeeld 2.5) de ontwikkelingen kanstheoretisch te kunnen aangeven zou men voor iedere ontmoeting de kans op een uitnodiging moeten kennen. Hoe zou men deze kansen kunnen schatten? Alleen een eeuwig-studente met een even eeuwig jeugdig voorkomen, die

haar vriendjes in groepen heeft ingedeeld zou misschien genoeg waarnemingen kunnen verzamelen om met behulp van een statistische analyse tot schattingen te komen.

Of een ontwikkeling in de toestand van het systeem de beslisser al of niet aanstaat zal hij tot uitdrukking moeten brengen in de waardering die hij aan deze ontwikkeling zal toekennen.

Het vaststellen van waarderingen is in het algemeen geen eenvoudige zaak. Het meisje waardeert haar vriendjes op grond van de prijs van de haar aangeboden corsage. Zij heeft kennelijk geen oog voor hun studieresultaten, hun kennis van de moderne literatuur of hun verrichtingen op het sportveld. Indien zij een meer genuanceerder kijk op haar vriendjes had, hoe zou zij hen dan noteren? Bovendien wil zij niet alleen een mooie corsage hebben maar ook het bal bezoeken. Dit zijn twee meer of minder strijdige wensen. Met betrekking tot de eerste wens kunnen wij aan iedere ontwikkeling een waardering toekennen gelijk aan de prijs van de corsage die tijdens deze ontwikkeling wordt overhandigd. Als de ontwikkeling niet leidt tot een uitnodiging, wordt de waardering gelijk aan nul gekozen. Met betrekking tot de tweede wens wordt aan alle ontwikkelingen die leiden tot een uitnodiging een gelijke waardering toegekend. Deze laatste waardering is moeilijk in geld uit te drukken. Hoe stellen wij nu de twee waarderingen samen tot één, als beide wensen tegelijk kenbaar worden gemaakt?

Het toekennen van waarderingen aan ontwikkelingen wordt nog moeilijker als naast kosten ook mensenlevens een rol spelen. Wij behoeven daarbij niet eens te denken aan oorlogshandelingen. Wij noemen slechts de verkeersproblemen. Een besliskundige benadering kan dus falen wanneer verlangens leiden tot niet-vergelijkbare waarderingen.

In het "hoedjesprobleem" zal een verkochte hoed op een niet mis te verstane wijze haar bijdrage tot de waardering van de desbetreffende ontwikkeling kunnen leveren. Maar wat doen wij als een klant onverrichterzake de winkel verlaat omdat het door haar gewenste hoedje is uitverkocht? Hoe groot is het verlies aan goodwill? Indien deze schade, die wel vergelijkbaar is met de overige kosten, niet kan worden

vastgesteld, hangt elke beslissing met betrekking tot de samenstelling van de collectie in de lucht. Wij komen hier straks op terug.

Met behulp van deze waarderungen kan ook aan beslissingen en strategieën die tot deze ontwikkelingen aanleiding hebben gegeven een waardering worden toegekend. De relatie tussen waarderungen enerzijds en beslissing of strategie anderzijds noemen wij de criteriumfunctie. De oplossing van het beslissingsprobleem bestaat nu daarin, dat wij moeten zoeken naar die beslissing of strategie waarvoor de criteriumfunctie maximaal is. Soms slaagt men er wel in om voor iedere beslissing of strategie afzonderlijk de bijbehorende waarde van de criteriumfunctie te bepalen, terwijl het onmogelijk is om het criterium expliciet te geven als functie van beslissing of strategie. Hoe bepaalt men nu de optimale beslissing of strategie? Wij zijn thans in een stadium aangeland, waarin het oorspronkelijke beslissingsprobleem vertaald is in een wiskundig optimumprobleem. Helaas is de Mathematische Besliskunde, het vak dat zich met dit soort wiskundige optimumproblemen bezighoudt, niet altijd een veilige haven. Tal van mathematische beslissingsproblemen wachten nog op een antwoord. Mede dank zij de moderne rekenapparatuur worden echter jaarlijks enorme vorderingen gemaakt. Wat vandaag nog een uitzichtloos probleem lijkt, kan morgen bij wijze van spreken een routineprobleem zijn.

Als het wiskundig optimumprobleem is opgelost en als het antwoord is terugvertaald in de oorspronkelijke terminologie, dan dient men er zich van te overtuigen dat het antwoord ook bruikbaar is. Zo niet, dan moet het model aan een kritische beschouwing worden onderworpen. Stap voor stap zullen wij dan moeten controleren of wij niet ergens te lichtvaardig zijn omgesprongen met veronderstellingen, waardoor sommige structurele relaties geen plaats kregen in het model.

Het opstellen van de criteriumfunctie wordt soms bemoeilijkt doordat een aantal gegevens ontbreken. Hierboven hebben wij bijv. reeds gewezen op het feit dat in het zg. "hoedjesprobleem" het verlies aan goodwill bij een gemiste verkoopkans moeilijk te bepalen was. Dit betekent niet dat een besliskundige aanpak nu zinloos is. Wij zullen dit toelichten met behulp van een vereenvoudigde versie

van dit probleem (zie ook het beslissingsprobleem in voorbeeld 6.4).

Stel dat de inkoper maar één type hoedje in zijn collectie opneemt en stel vervolgens dat hij beschikt over de hieronder vermelde gegevens:

- 1) de inkoopprijs van een hoedje bedraagt dertig gulden;
- 2) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt vijftig gulden;
- 3) de verkoopprijs in de uitverkoop is twintig gulden;
- 4) de voorraadkosten bedragen vijf gulden per seizoen per hoedje;
- 5) de kansverdeling van de vraag  $v$  wordt gegeven door de kansdichtheid

$$f(v) = (0,02)^2 v e^{-0,02v} ;$$

(de verwachting van de vraag naar dit type hoedje is 100).

De vraag is nu: "Hoeveel hoedjes moet de inkoper bestellen?". Dit aantal wordt mede bepaald door het zg. verlies aan goodwill. Door het ontbreken van een numerieke waarde van deze schade, kunnen wij strikt genomen het beslissingsprobleem niet oplossen. Wat wij echter wel kunnen doen is de optimale bestelgrootte bepalen voor verschillende waarden van dit verlies. In tabel 4.1 vindt men het gevonden resultaat.

Tabel 4.1

Invloed van het verlies aan goodwill  
op de optimale bestelgrootte

| verlies aan goodwill<br>in guldens | optimale<br>bestelgrootte |
|------------------------------------|---------------------------|
| 0                                  | 88                        |
| 5                                  | 99                        |
| 10                                 | 109                       |
| 15                                 | 117                       |
| 20                                 | 124                       |
| 25                                 | 130                       |
| 30                                 | 136                       |



Uit tabel 4.1 blijkt dat een besliskundige aanpak, ook als essentiële gegevens ontbreken, de beslisser nuttige informatie kan verschaffen.

Komen wij tenslotte tot de vraag: "Is een besliskundig onderzoek altijd zinvol?". Altijd ongetwijfeld niet! De studente kan met haar "bal-probleem" veel beter een vriendin dan een besliskundige raadplegen. Bij vele andere problemen kan men niet zomaar van te voren vaststellen of een besliskundig onderzoek zinvol is. Wellicht komt men bij het opstellen van het mathematische model reeds voor onoverkomelijke moeilijkheden te staan doordat òf de situatie zich niet door een eenvoudige structuur laat beschrijven òf de noodzakelijke gegevens ontbreken. Het gebeurt ook wel eens dat men pas bij het oplossen van het mathematische beslissingsprobleem struikelt.

Zonder een alternatieve benadering te kort te willen doen, kan men toch stellen dat ook menig onvoltooid besliskundig onderzoek zinvol is, omdat men door zijn speciale aanpak op een systematische wijze aan het denken wordt gezet.

## 5. Indeling van het gedeelte besliskunde

De eerste vier delen van deze syllabus gaven een samenvatting van die voorkennis van wiskunde en statistiek welke vereist is om de hierna volgende beschouwingen met vrucht te kunnen volgen.

In de paragrafen 6 en 7 van dit deeltje worden een aantal beslissingsproblemen opgelost met behulp van methoden ontleend aan de klassieke wiskunde en de mathematische statistiek. Een belangrijk deel van de beslissingsproblemen die men in de praktijk ontmoet vraagt echter om een andere wiskundige benadering. In paragraaf 3 hebben wij vastgesteld dat de collectie van beslissingsproblemen in twee delen kan worden opgesplitst. De eerste deelverzameling bestaat dan uit de zg. één-stapsbeslissingsproblemen. Verder kent men nog de meer-stapsbeslissingsproblemen, welke dan de tweede verzameling vormen.

Als in het mathematische model voor de toestand  $S_0$  de verzameling van toegelaten beslissingen  $X$  wordt aangeduid met  $\mathcal{X}_{S_0}$  en de criteriumfunctie wordt aangegeven door  $y(S_0; X)$ , luidt het één-stapsbeslissingsprobleem in zijn meest algemene vorm:

Bepaal het maximum (of het minimum) van de  $X$ -functie

$$(5.1) \quad y(S_0; X)$$

onder de bijvoorwaarde

$$(5.2) \quad X \in \mathcal{X}_{S_0}.$$

In deel 6, wiskundige programmering, beschouwen wij eerst het geval:

Bepaal het maximum (of het minimum) van de  $X$ -functie

$$(5.3) \quad y(S_0; X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

onder de bijvoorwaarde (5.2) met

$$(5.4) \quad \mathcal{X}_{S_0} \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, \dots, m_1) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i & (i = m_1+1, \dots, m_2) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i = m_2+1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, \dots, n). \end{cases}$$

De verzameling van technieken die voor de oplossing van dit type problemen zijn ontwikkeld, draagt de naam van lineaire programmering. In het genoemde deeltje worden enkele van deze technieken uitvoerig besproken.

Een belangrijke groep van beslissingsproblemen kan worden beschreven door (5.3) en (5.4), als men aan (5.4) toevoegt, dat bepaalde componenten van  $X$  alleen gehele waarden mogen doorlopen.

Als  $J$  de verzameling van de desbetreffende indices aangeeft, worden beslissingsproblemen van dit type beschreven door:

Bepaal het maximum (of het minimum) van de X-functie

$$(5.5) \quad y(S_0; X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

onder de bijvoorwaarde (5.2) met

$$(5.6) \quad X_{S_0} \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, \dots, m_1) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i & (i = m_1+1, \dots, m_2) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i = m_2+1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 ; & x_j \equiv \text{geheel als } j \in J. \end{cases}$$

Wanneer  $J$  bestaat uit alle indices  $j$ , spreekt men van een discreet lineair programmeringsprobleem. Voor het geval niet alle indices tot  $J$  behoren, wordt het probleem aangeduid met de naam gemengd lineair programmeringsprobleem.

In hetzelfde deeltje wordt tevens aandacht gevraagd voor beslissingsproblemen waarvoor geldt dat de criteriumfunctie een kwadratische vorm bezit. De bijvoorwaarden zijn wederom van de gedaante (5.4). De verzameling van technieken die voor de oplossing van dit type problemen zijn ontwikkeld, draagt de naam van kwadratische programmering.

Indien men in een tijdsbestek meer dan één beslissing moet nemen en als deze beslissingen elkaar sterk beïnvloeden, dan is het duidelijk dat het gestelde beslissingsprobleem niet gezien mag worden als een veelvoud van onderling niet samenhangende één-stapsbeslissingsproblemen. Uiteraard kan men trachten de te nemen beslissingen op te vatten als componenten van één superbeslissing, waardoor het probleem toch tot een één-stapsbeslissingsprobleem wordt teruggebracht. Als een dergelijke poging slaagt en als het verkregen één-stapsbeslissingsprobleem eenvoudig oplosbaar wordt, is deze werkwijze zeker aan te bevelen. Er zijn echter tal van beslissingsproblemen waarvoor deze werkwijze zal falen. Wij denken hierbij aan beslissingssituaties waarvoor geldt dat men op het eerste beslissingstijdstip niet weet welke toestanden het systeem op latere beslissingstijdstippen zal aannemen. Aangezien

de beslissingen mede bepaald worden door de toestand van het systeem op de desbetreffende tijdstippen, kunnen zij niet op het eerste beslissingstijdstip worden vastgesteld. Wel kan men proberen op het eerste beslissingstijdstip een strategie, d.i. een beslissingsvoorschrift, te ontwerpen. Indien men de keuze van een strategie opvat als een superbeslissing, dan is het meer-stapsbeslissingsprobleem opnieuw herleid tot een één-stapsbeslissingsprobleem. Ook nu geldt dat deze benadering zinvol is als het gestelde probleem op deze wijze kan worden opgelost. Het is voorstelbaar dat het beslissingsprobleem uit voorbeeld 2.3 op deze wijze tot een oplossing gebracht kan worden. Immers de toegelaten strategieën worden bepaald door 9 grenspunten (zie figuur 3.6). Een beslissing  $X$  met 9 componenten  $x_j$  zou de keuze van de strategie kunnen aangeven. Uit een kritische beschouwing van figuur 3.5 volgt echter dat de toegelaten strategieën voor het beslissingsprobleem uit voorbeeld 2.2 zich niet door beslissingen met een gegeven eindig aantal componenten laten beschrijven. Wiskundig gezien correspondeert een beslissing met een vector en een strategie met een functie. Ook al is het voor sommige meer-stapsbeslissingsproblemen in principe mogelijk deze problemen te herleiden tot één-stapsbeslissingsproblemen, in de praktijk behoeft dit niet altijd verstandig te zijn.

In deel 7 wordt aandacht gevraagd voor het bepalen van optimale strategieën. Eerst worden meer-stapsbeslissingsproblemen beschouwd, waarin slechts van de beslisser verlangd wordt dat hij een eindig aantal beslissingen zal nemen. Daarna worden beslissingssituaties besproken waarin een onbegrensd aantal beslissingen moeten worden genomen. Talrijk zijn de beslissingssituaties waarvoor geldt dat de toepassing van een strategie een ontwikkeling in de toestand van het systeem doet ontstaan, die met behulp van een Markov-proces kan worden beschreven. Technieken die voor dit soort beslissingsproblemen zijn ontwikkeld worden dikwijls samengebracht onder het hoofd Markov-programmering. Ook hieraan zullen wij aandacht besteden. Deze technieken blijken goed bruikbaar te zijn voor het oplossen van voorraad- en vervangingsproblemen. Zoals wij reeds in paragraaf 3

hebben vastgesteld, wordt het meer-stapsbeslissingsprobleem gegeven door:

Bepaal het maximum (of het minimum) van de  $z$ -functie

$$(5.7) \quad y(S_0; z)$$

onder de bijvoorwaarden

$$(5.8) \quad X = z(S) \in \mathcal{X}_S \quad \text{voor } S \in \mathcal{S}.$$

Aangezien het meer-stapsbeslissingsprobleem veelal iteratief wordt opgelost, geven (5.7) en (5.8) niet aan op welke wijze het meer-stapsbeslissingsprobleem zal worden benaderd.

In deel 8 vindt men een inleiding tot de speltheorie in het hoofdstuk minimaxmethode. Het aantal toepassingsmogelijkheden van de speltheorie is tot dusver nog gering. In hetzelfde deeltje worden enige wiskundige aspecten van de netwerkplanning toegelicht. Voor het maken van tijdschema's van nog uit te voeren projecten kan men dikwijls met succes gebruik maken van methoden die ressorteren onder netwerkplanning. Indien voor het oplossen van beslissingsproblemen niet alle wiskundige operaties kunnen worden uitgevoerd, kunnen de gerezen moeilijkheden dikwijls, ten koste van enige nauwkeurigheid, worden overwonnen met behulp van Monte Carlo technieken. Deze technieken worden eveneens in deel 8 toegelicht, in het hoofdstuk simulatie.

## 6. Enige voorbeelden

In deze paragraaf zullen wij een aantal beslissingsproblemen behandelen die met de reeds besproken wiskundige en statistische methoden kunnen worden opgelost.

### Voorbeeld 6.1

Laten wij om de gedachten te bepalen aannemen dat wij belast zijn

met het beheer van de champignonvoorraad van een restaurant. Door de eigenaardige geografische ligging van ons eethuis kan het slechts éénmaal in de twee dagen door de champignonkweker worden bevoorraad. Nu is het met champignons zo gesteld, dat de houdbaarheid ook slechts twee dagen bedraagt, zodat dus steeds bij aankomst van de kweker de voorraad moet worden ververst. De behoefte aan champignons is echter niet van tevoren bekend, maar volgt een kansverdeling van bekend type met gegeven parameterwaarden. Het is heel goed mogelijk dat bij een overstelpende vraag de voorraad niet toereikend blijkt te zijn. In dat geval zullen in de gerechten blikchampignons worden verwerkt, welke in "onbeperkte" hoeveelheden aanwezig zijn. De eigenaar gebruikt deze paddestoelen echter ongaarne vanwege hun hoge inkoopprijs. De opgave waarvoor wij ons eens in de twee dagen gesteld zullen zien luidt nu als volgt:

Bepaal - bij bekende kansverdeling van de vraag  $\underline{v}$  - de optimale bestelgrootte, indien gegeven zijn de inkoopkosten  $h(x)$  van de verse champignons als functie van de bestelgrootte  $x$  en tevens de prijs  $c$  van een eenheid blikchampignons.

Oplossing:

Wij behoeven slechts rekning te houden met de volgende twee verschillende kosten

- 1) de inkoopkosten van de verse champignons  $h(x)$ ;
- 2) de inkoopkosten van de blikchampignons  $(\underline{v}-x)c$ , indien de vraag  $\underline{v}$  groter is dan  $x$ .

Het is nu eenvoudig in te zien dat de verwachting van de totale kosten gegeven wordt door

$$(6.1) \quad y(s_0; x) = h(x) + c \int_x^{\infty} (\underline{v}-x)f(\underline{v}) d\underline{v}$$

als  $f(\underline{v})$  de kansdichtheid van de vraagverdeling voorstelt.

Als voor  $x = x^*$  de functie  $y(s_0; x)$  minimaal is, wordt de bestelgrootte  $x^*$  optimaal genoemd.

Indien  $y(s_0; x)$  een differentieerbare functie van  $x$  is, dan geldt voor  $x = x^*$  (vgl. stelling 12.5, deel 1)

$$(6.2) \quad y'(s_0; x^*) = h'(x^*) - c \int_{x^*}^{\infty} f(v) dv = 0;$$

dat wil zeggen

$$(6.3) \quad \int_{x^*}^{\infty} f(v) dv = P\left[v \geq x^*\right] = \frac{h'(x^*)}{c}.$$

Het linkerlid van (6.3) stelt de kans voor dat de voorraad niet toereikend is, terwijl het rechterlid gelijk is aan het quotiënt van de marginale kosten bij  $x = x^*$  en de vervangingsprijs.

Indien  $h(x) = ax$ , waarbij wij  $a < c$  mogen veronderstellen, geldt

$$(6.4) \quad \int_{x^*}^{\infty} f(v) dv = \frac{h'(x^*)}{c} = \frac{a}{c}.$$

#### Voorbeeld 6.2

In dit tweede beslissingsprobleem kan een boer op iedere laatste dag van de maand een deel van zijn tegoed bij een coöperatieve melkfabriek opnemen.

Deze agrariër vraagt zich nu af hoeveel geld hij zal opnemen als gegeven is dat

- 1) er nog f.150,- in zijn geldkist zit;
- 2) de uitgaven voor de komende maand een kansverdeling bezitten met een kansdichtheid

$$(6.5) \quad f(v) = 2v \quad 0 \leq v \leq 1,$$

waarbij de geldeenheid f.2.500,- bedraagt;

- 3) de melkfabriek 5% rente per jaar geeft;
- 4) de plaatselijke Boerenleenbank altijd geld leent tegen 8% per jaar.

#### Oplossing:

Stel dat onze boer aan het eind van de maand april zoveel geld opneemt dat hij in totaal de beschikking heeft over  $x$  geldeenheden. Aangezien de uitgaven per maand nooit meer kunnen bedragen dan één eenheid, is het zeker niet optimaal  $x$  groter dan 1 te kiezen.

Wij beschouwen derhalve slechts waarden van  $x$  tussen 0 en 1.

Nu zijn er twee mogelijkheden:

1<sup>e</sup>. De benodigde hoeveelheid  $v$  is minder dan  $x$ .

In figuur 6.1 is het kasverloop geschetst, waarbij werd aangenomen dat de uitgaven gelijkmatig over de maand mei gespreid zijn.

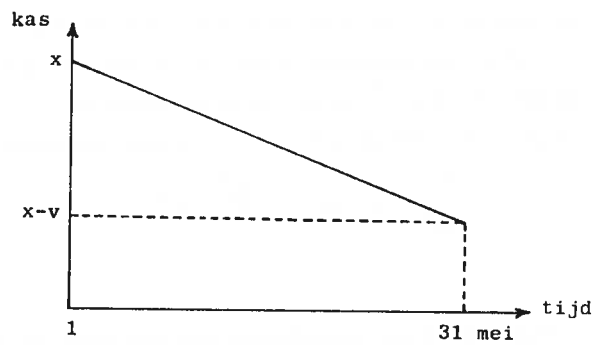


fig. 6.1

Het kasverloop in de maand mei  
wanneer er minder dan  $x$  geldeenheden worden gebruikt

Gemiddeld heeft hij dus in kas

$$(6.6) \quad \frac{1}{2}(x+x-v) = x - \frac{1}{2}v$$

en derhalve is de rentederving (tijd  $\times$  rentepercentage  $\times$  kas)

$$(6.7) \quad \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{100} \cdot (x - \frac{1}{2}v) = \frac{1}{240}(x - \frac{1}{2}v) .$$

De totale uitgaven zijn dus

$$(6.8) \quad k(x,v) = v + \frac{1}{240}(x - \frac{1}{2}v) \quad \text{als } v < x .$$

2<sup>e</sup>. De benodigde hoeveelheid  $v$  is groter dan of gelijk aan  $x$  (zie figuur 6.2).



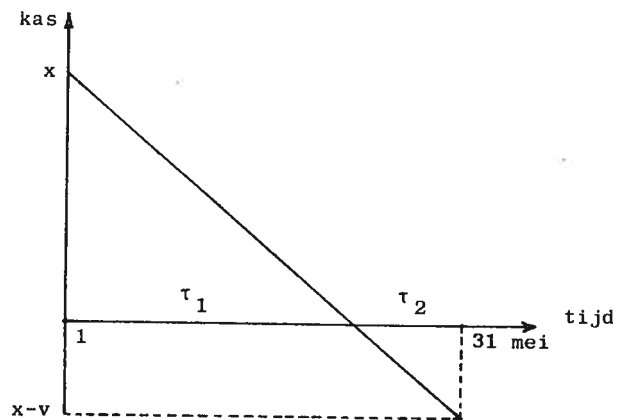


fig. 6.2

Het kasverloop in de maand mei  
wanneer er meer dan x geldeenheden worden gebruikt

Gedurende een periode van de lengte  $\tau_1$  is er bij onze boer geld in het kistje, terwijl hij gedurende een periode van de lengte  $\tau_2$  geld moet lenen bij de Boerenleenbank. Men kan nu eenvoudig nagaan dat

$$(6.9) \quad \tau_1 = \frac{x}{v}$$

$$(6.10) \quad \tau_2 = \frac{v-x}{v} .$$

Gemiddeld heeft hij in de periode  $\tau_1$  in kas

$$(6.11) \quad \frac{1}{2} x .$$

Gemiddeld heeft hij geleend in de periode  $\tau_2$

$$(6.12) \quad \frac{1}{2}(v-x) .$$

De rentederving in de periode  $\tau_1$  wordt gegeven door

$$(6.13) \quad \left(\frac{1}{12} \frac{x}{v}\right) \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{2} x = \frac{1}{480} \cdot \frac{x^2}{v} .$$

De te betalen rente aan de Boerenleenbank (tijd  $\times$  rentepercentage  $\times$  gemiddeld geleend bedrag) in de periode  $\tau_2$  wordt gegeven door

$$(6.14) \quad \left(\frac{1}{12} \frac{v-x}{v}\right) \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{1}{2}(v-x) = \frac{1}{300} \frac{(v-x)^2}{v} .$$

De totale uitgaven worden dus gegeven door

$$(6.15) \quad k(x,v) = v + \frac{1}{480} \frac{x^2}{v} + \frac{1}{300} \frac{(v-x)^2}{v} \quad \text{als } v \geq x .$$

De verwachting van de kosten wordt gegeven door de verwachting van de functie  $k(x,v)$ , die gedefinieerd is door (6.8) en (6.15). Wij vinden dus voor de verwachting

$$(6.16) \quad \begin{aligned} \mathcal{E} k(x, \underline{v}) &= 2 \int_0^1 v \cdot v \, dv + 2 \frac{1}{240} \int_0^x \left(x - \frac{1}{2}v\right) v \, dv + \\ &+ 2 \int_x^1 \left(\frac{1}{480} \frac{x^2}{v} + \frac{1}{300} \frac{(v-x)^2}{v}\right) v \, dv = \\ &= \frac{301}{450} - \frac{1}{150} x + \frac{13}{1200} x^2 - \frac{13x^3}{3600} . \end{aligned}$$

Opdat de verwachting van de totale kosten minimaal is moet voldaan zijn aan (vgl. stelling 10.2, deel 1)

$$(6.17) \quad \frac{d \mathcal{E} k(x, \underline{v})}{dx} = 0 .$$

D.w.z.

$$(6.18) \quad -\frac{1}{150} + \frac{26}{1200} x - \frac{39x^2}{3600} = 0 ,$$

of

$$(6.19) \quad 13x^2 - 26x + 8 = 0$$

of

$$(6.20) \quad x = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{13}} .$$

Aangezien  $x \leq 1$  volgt uit (6.16)

$$(6.21) \quad x = 1 - \sqrt{\frac{5}{13}} \approx 0,38 .$$

Uit (6.16) vinden wij

$$(6.22) \quad \frac{d^2 \mathcal{L}_k(x, \underline{v})}{dx^2} = \frac{26}{1200} - \frac{26}{1200} x$$

en dus voor  $x < 1$

$$(6.23) \quad \frac{d^2 \mathcal{L}_k(x, \underline{v})}{dx^2} > 0 .$$

De verwachting van de totale kosten bezit derhalve voor  $x \approx 0,38$  een minimum en het optimale op te nemen bedrag wordt dus gegeven door

$$(6.24) \quad 0,38 \cdot f.2.500 - f.150 = f.800 .$$

### Voorbeeld 6.3

Een fabriek heeft voor een speciale opdracht een grote hoeveelheid entabogeen nodig. Entabogeen kan ter plaatse op elk tijdstip worden ingekocht in iedere gewenste hoeveelheid à f.5000,- per kilo. Men kan ook jaarlijks op 1 juli entabogeen inkopen in Centraal Afrika en deze per boot laten verzenden naar de fabriek. Indien men een hoeveelheid van  $x$  kg inkoopt, komen de totale kosten (in guldens) inclusief vervoer op

$$(6.25) \quad 3000x + 20x^2 .$$

Verspreid over grote gebieden wordt entabogeen in kleine hoeveelheden gevonden. Grote hoeveelheden kunnen slechts ten koste van veel inspanning worden verkregen. Vandaar dat de inkoopkosten per eenheid

$$(6.26) \quad \frac{3000x + 20x^2}{x} = 3000 + 20x$$

monotoon toenemen als functie van de omvang  $x$  van de bestelling.

Verder is gegeven dat

- 1) de fabriek het benodigde geld moet lenen à 8% per jaar;
- 2) met het werk direct na aankomst van de grondstoffen uit Afrika wordt begonnen;
- 3) het werk negen maanden zal duren;

- 4) het verbruik van entabogeen constant zal zijn en dat men in totaal 60 kg nodig heeft;
- 5) de opdrachtgever zal betalen zodra het project wordt opgeleverd.

Gevraagd wordt nu te bepalen hoeveel kg entabogeen in Afrika en hoeveel kg ter plaatse moet worden ingekocht, opdat de totale kosten minimaal zijn.

Oplossing:

In dit probleem zullen wij aannemen dat de toestand van het systeem beschreven kan worden door de volgende twee toestandsgrottenheden

- 1) de nog voorradige hoeveelheid entabogeen uit Afrika;
  - 2) de hoeveelheid entabogeen reeds gekocht op de plaatselijke markt.
- De toestandruimte  $\mathcal{S}$  is dus een twee-dimensionale Cartesische ruimte. Als de beslissing  $x$  de in Afrika in te kopen hoeveelheid entabogeen voorstelt en als in Nederland slechts entabogeen wordt ingekocht voor onmiddellijk gebruik (geen voorraadvorming), dan wordt in figuur 6.3 de ontwikkeling in de toestand van het systeem aangegeven. Aangezien het verbruik van entabogeen 80 kg per jaar bedraagt, zal de voorraad uit Afrika na  $\frac{x}{80}$  jaar zijn uitgeput, zodat vanaf dat tijdstip entabogeen in Nederland moet worden ingekocht.

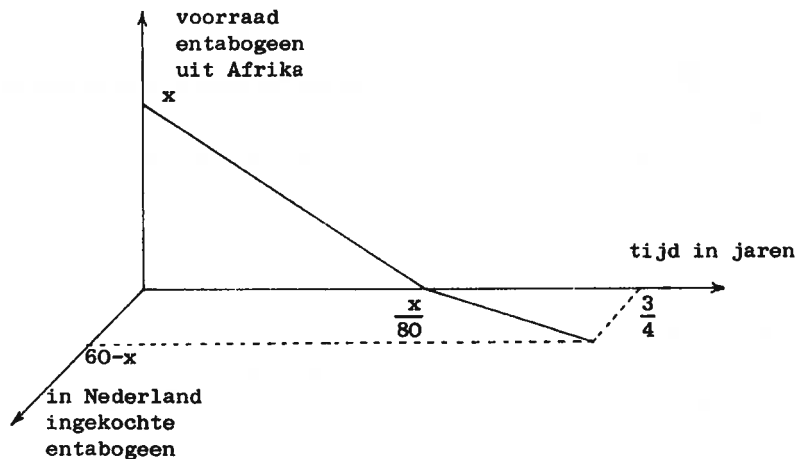


fig. 6.3

Ontwikkeling in de toestand van het systeem

De aan deze ontwikkeling van het systeem toe te kennen waardering (inclusief beslissingskosten) wordt gevormd door

$$1) \text{ inkoopkosten } \quad 3000x + 20x^2 + \quad (\text{Afrika}) \\ + (60-x) \cdot 5000 \quad (\text{Holland}).$$

2) rente

- a) te betalen aan de bank vanwege de financiering van de in Afrika ingekochte hoeveelheid entabogeen

$$\text{tijd} \times \text{rente} \times \text{kosten} = \frac{3}{4} \cdot 0,08 \cdot (3000x + 20x^2);$$

- b) te betalen aan de bank vanwege de financiering van de continue inkoop van entabogeen in Holland

$$\frac{1}{2} \times \text{tijd} \times \text{rente} \times \text{kosten} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{80}\right) \cdot 0,08 \cdot (60-x) \cdot 5000.$$

Wij zullen nu de renteberekening in punt 2 nader toelichten (zie figuur 6.4).

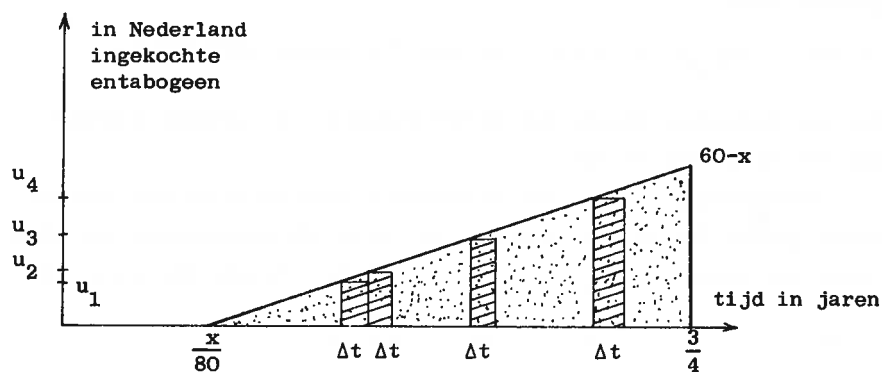


fig. 6.4

Renteberekening bij voorbeeld 6.3

De renten verschuldigd over de perioden met lengten  $\Delta t$  worden in eerste benadering gegeven door

$$\text{rente} \times \text{tijd} \times \text{hoeveelheid} \times \text{prijs} = 0,08 \cdot \Delta t \cdot u_1 \cdot 5000$$

of, in andere woorden, door  $0,08 \cdot 5000$  maal het oppervlak van het bijbehorende garceerde gebied. Men kan nu eenvoudig inzien dat de rente over de gehele tijdsperiode  $(\frac{x}{80}; \frac{3}{4})$  gegeven wordt door

$$0,08 \cdot 5000 \cdot \text{oppervlak van gestippelde gebied}$$

en dus door

$$\frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4} - \frac{x}{80}) \cdot (60-x) \cdot 0,08 \cdot 5000 \cdot$$

De toe te kennen waardering wordt nu gelijk gekozen aan de totale kosten

$$\begin{aligned} (1 + \frac{9}{12} 0,08)(3000x + 20x^2) + (1 + \frac{1}{2} (\frac{3}{4} - \frac{x}{80}) 0,08)(60-x)5000 = \\ (6.27) \\ = 23,7(x - 44,7257)^2 + 261590,7987 \end{aligned}$$

Het criterium voor de optimale beslissing, de  $x$ -functie, wordt nu gegeven door

$$(6.28) \quad y(S_0; x) = 23,7(x - 44,7257)^2 + 261590,7987 \cdot$$

Men kan eenvoudig nagaan dat (6.28) minimaal is, wanneer  $x$  gelijk gekozen wordt aan 44,7257.

Veronderstel nu dat men in Afrika alleen partijen kan inkopen welke groter dan of gelijk aan 50 kg zijn. De verzameling van toegelaten beslissingen  $\mathcal{X}(S_0)$  bestaat dan uit de volgende beslissingen

$$(6.29) \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x \geq 50.$$

Uit (6.28) volgt, dat vanwege de term  $23,7(x - 44,7257)^2$  de keuze moet vallen op die toegelaten waarde van  $x$  welke het minst "ver" van 44,7257 verwijderd is. Bijgevolg wordt onder de bijvoorwaarde (6.29) de optimale beslissing gegeven door  $x = 50$ .

Voorbeeld 6.4

Wanneer men een stuk land ter beschikking heeft en dit wil bebouwen, zal de keuze van de produkten o.a. afhangen van de opbrengsten in hl per oppervlakte-eenheid van de verschillende produkten, van de prijzen die men per hl ontvangt, van de bewerkelijkheid van de produkten en de invloed van vruchtwisseling.

In het volgende worden enige modellen opgesteld voor de situatie, waarin men wil kiezen uit twee produkten: tarwe en haver. Vruchtwisseling en beperkende voorwaarden ten aanzien van de beschikbare arbeidskrachten worden buiten beschouwing gelaten. Het is echter mogelijk ook deze in het model te betrekken; verder kunnen voor meer dan twee gewassen analoge methoden gevolgd worden.

Het eenvoudigste geval

Stel de fractie van het land, die met tarwe zal worden bezaaid gelijk aan  $x$ . Wij nemen aan dat het land 1 ha groot is en dat de oogstopbrengst per ha voor tarwe  $a_1$  hl bedraagt en voor haver  $a_2$  hl. Zijn de prijzen die men per hl ontvangt  $p_1$ , resp.  $p_2$ , dan ontvangt men, wanneer een fractie  $x$  voor tarwe gebruikt wordt

$$(6.30) \quad y = x a_1 p_1 + (1-x) a_2 p_2 .$$

Uiteraard wil men  $y$  zo groot mogelijk maken, wat in dit geval zeer eenvoudig is.  $y$  is een lineaire functie van  $x$ , die men ook kan schrijven in de vorm

$$(a_1 p_1 - a_2 p_2) x + a_2 p_2 ,$$

waaruit direct blijkt dat men  $x = 1$  moet kiezen indien  $a_1 p_1 - a_2 p_2 > 0$  en  $x = 0$  wanneer  $a_1 p_1 - a_2 p_2 < 0$  is. In het geval  $a_1 p_1 - a_2 p_2 = 0$  maakt het geen verschil, hoeveel men met het ene produkt bebouwt en hoeveel met het andere.

Bespreking waarbij rekening wordt gehouden met spreidingen

Het belangrijkste bezwaar dat men tegen bovenstaande oplossing kan inbrengen, is het verwaarlozen van afwijkingen van de gemiddelde oogstresultaten. Het staat bij voorbaat vast dat factoren die men

niet in de hand heeft, zoals bijv. de weersomstandigheden, de grootte van de oogst beïnvloeden. In dergelijke gevallen is het onjuist alleen te letten op de gemiddelde resultaten, omdat dan ook zeer lage opbrengsten kunnen voorkomen, wat soms niet te aanvaarden consequenties heeft.

Om nu afwijkingen van de gemiddelde oogstresultaten in onze beschouwingen te betrekken, vatten wij de oogstresultaten op als stochastische grootheden, waarvan wij de verdeling kennen. Het financiële resultaat zal dan eveneens een stochastische grootheid zijn, waarvan de verdelingsfunctie uit die van de opbrengsten volgt. Acht men nu een financiële opbrengst beneden een zeker bedrag onaanvaardbaar, dan kan men eisen dat de kans hierop een bepaalde waarde niet mag overtreffen. Gezien de aard van het probleem zal het in het algemeen niet mogelijk zijn er voor te zorgen dat bepaalde kleine opbrengsten in het geheel niet kunnen voorkomen.

Uit alle mogelijkheden, die door de gestelde voorwaarde niet worden uitgesloten, kunnen wij nu diegene kiezen, welke de verwachting van de financiële opbrengst maximaliseert.

Wij zullen nu nagaan op welke wijze men te werk kan gaan in het geval, waarin op een deel van het land jaar in jaar uit tarwe wordt verbouwd en op het overige stuk voortdurend haver.

#### Wiskundige formulering van het probleem

De opbrengst in hl aan tarwe, wanneer het gehele land hiermee bezaaid wordt, geven wij aan met  $\underline{v}_1$ ; de opbrengst in hl aan haver, wanneer alleen haver wordt verbouwd met  $\underline{v}_2$ . Wij nemen van beide grootheden aan dat ze normaal verdeeld zijn met bekende verwachting en bekende standaardafwijking, welke wij voor tarwe, resp. haver aangeven met  $\mu_1$  en  $\sigma_1$ , resp.  $\mu_2$  en  $\sigma_2$ . Doordat de meeste toevallige factoren zowel de tarwe als de haveropbrengst zullen beïnvloeden, zijn  $\underline{v}_1$  en  $\underline{v}_2$  niet onderling onafhankelijk, maar gecorreleerd; ook de waarde  $\rho$  van de correlatiecoëfficiënt onderstellen wij bekend uit waarnemingen in voorafgaande jaren.  $\underline{v}_1$  en  $\underline{v}_2$  bezitten dus een simultane normale verdeling, waarvan alle vijf parameters gegeven zijn



(vgl. (8.9), deel 2).

Bezaait men nu een fractie  $x$  van het land met tarwe en de rest met haver, dan is de opbrengst aan tarwe gelijk aan  $xv_1$  en die aan haver gelijk aan  $(1-x)v_2$ . Geven wij wederom de verkoopprijs per hl aan met  $p_1$  resp.  $p_2$ , dan is het geldbedrag  $y$  dat men ontvangt wanneer een fractie  $x$  met tarwe bezaaid wordt, gelijk aan

$$(6.31) \quad y = xp_1v_1 + (1-x)p_2v_2.$$

Volgens stelling 11.4 uit deel 2 is een lineaire combinatie van normaal verdeelde stochastische grootheden weer normaal verdeeld, zodat wij de verdeling van  $y$  volledig kennen, wanneer de verwachting en de standaardafwijking van  $y$  bekend zijn. Uit formule (6.31) en de gegevens omtrent de verdelingen van  $v_1$  en  $v_2$  volgt (vgl. de stellingen 10.3 en 10.8, deel 2)

$$(6.32) \quad E_y = xp_1\mu_1 + (1-x)p_2\mu_2$$

en

$$(6.33) \quad \sigma^2(y) = x^2p_1^2\sigma_1^2 + (1-x)^2p_2^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2\rho p_1p_2.$$

Wanneer wij geen extra eisen aan de uitkomst  $y$  opleggen, is het probleem hetzelfde als het reeds behandelde: kies  $x$  zó, dat de verwachting van de opbrengst zo groot mogelijk is, d.w.z. maximaliseer (6.32) als functie van  $x$ .

In de praktijk zal men dit zeker niet blindelings doen, omdat het mogelijk is dat een hoge verwachting van  $y$  gepaard gaat met een zo grote standaardafwijking, dat men ondanks de hoge verwachting een flinke kans loopt betrekkelijk kleine waarden van  $y$  te vinden. Zijn de consequenties van ontvangsten kleiner dan een bepaald bedrag  $w$  onaanvaardbaar, dan zal men eisen, dat de kans hierop niet groter mag zijn dan een klein getal  $\beta$ . Wij krijgen dus een nevenvoorwaarde, welke er als volgt uitziet

$$(6.34) \quad P\left[y \leq w\right] \leq \beta.$$

Deze voorwaarde kan tot gevolg hebben, dat wij beperkt worden in de keuze van  $x$ . Wij moeten daarom eerst nagaan uit welke  $x$ 'en er gekozen kan worden; de verwachting van de ontvangsten kan dan over de niet uitgesloten  $x$ 'en worden gemaximaliseerd.

Voor de eerste van deze twee stappen voeren wij een nieuwe variabele  $\underline{u}$  in, de gestandaardiseerde van  $\underline{y}$

$$(6.35) \quad \underline{u} = \frac{\underline{y} - \xi_{\underline{y}}}{\sigma(\underline{y})} ,$$

die dus normaal verdeeld is met verwachting 0 en standaardafwijking 1 (vgl. stelling 7.1, deel 2). Voorwaarde (6.34) gaat dan, uitgedrukt in  $\underline{u}$ , over in

$$(6.36) \quad P \left[ \underline{u} \leq \frac{w - \xi_{\underline{y}}}{\sigma(\underline{y})} \right] \leq \beta ,$$

of als wij stellen

$$(6.37) \quad w' = \frac{w - \xi_{\underline{y}}}{\sigma(\underline{y})}$$

in

$$(6.38) \quad P[\underline{u} \leq w'] \leq \beta .$$

Daar  $\underline{u} \sim N(0,1)$  verdeeld is en  $\beta$  van tevoren wordt gekozen, kunnen wij in een fractielentabel van de normale verdeling <sup>\*)</sup> aflezen welke waarden van  $w'$  bij gegeven  $\beta$  aan (6.38) voldoen. Wij geven de waarde, die  $\underline{u}$  met een kans  $\beta$  overschrijdt aan met  $\xi_{\beta}$  (zie figuur 6.5). Naarmate  $\beta$  kleiner is, is  $\xi_{\beta}$  groter zodat de waarden van  $w'$ , die voldoen aan (6.38) gegeven worden door de ongelijkheid

$$(6.39) \quad w' \leq -\xi_{\beta} .$$

---

\*) In tabel B uit deel 2 werd  $\beta$  opgegeven als functie van  $u$ . Omgekeerd kan men ook  $u$  opgeven als functie van  $\beta$ ; men spreekt dan van een fractielentabel en gebruikt in plaats van het symbool  $u$  vaak het symbool  $\xi_{\beta}$ .

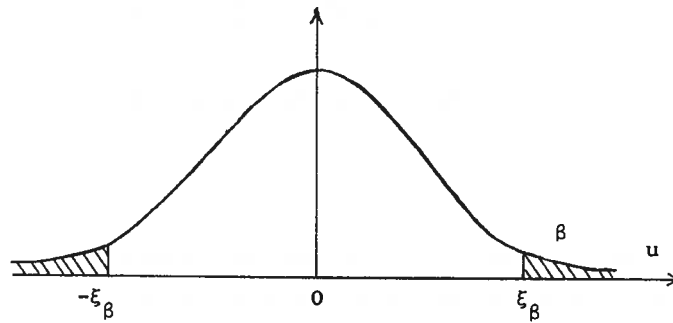


fig. 6.5

De overschrijdingskans bij een normale verdeling

Vervangen wij hierin  $w'$  door  $\frac{w - \xi_y}{\sigma(y)}$  en vullen wij voor  $\xi_y$  en  $\sigma(y)$  de gevonden waarden (6.32) en (6.33) in, dan zien wij, dat  $x$  moet voldoen aan

$$(6.40) \quad \frac{w - \{xp_1\mu_1 + (1-x)p_2\mu_2\}}{\sqrt{x^2 p_1^2 \sigma_1^2 + (1-x)^2 p_2^2 \sigma_2^2 + 2(1-x)x p_1 p_2 \rho \sigma_1 \sigma_2}} \leq -\xi_\beta.$$

Om de voorwaarde beter te kunnen doorzien schrijven wij deze in de vorm <sup>\*)</sup>

$$(6.41) \quad \begin{aligned} & \{-(p_1\mu_1 - p_2\mu_2)^2 + \xi_\beta^2(p_1^2\sigma_1^2 + p_2^2\sigma_2^2 - 2p_1p_2\rho\sigma_1\sigma_2)\}x^2 + \\ & + 2\{w(p_1\mu_1 - p_2\mu_2) - p_1p_2\mu_1\mu_2 + p_2^2\mu_2^2 + \xi_\beta^2(-p_2^2\sigma_2^2 + p_1p_2\rho\sigma_1\sigma_2)\}x + \\ & - (w - p_2\mu_2)^2 + \xi_\beta^2 p_2^2 \sigma_2^2 \leq 0, \end{aligned}$$

of

$$(6.42) \quad ax^2 + bx + c \leq 0,$$

<sup>\*)</sup> Hierbij is uitgegaan van de reële veronderstelling dat  $\beta < \frac{1}{2}$  en dus  $\xi_\beta > 0$  is.

waarin

$$(6.43) \quad a = - (p_1 \mu_1 - p_2 \mu_2)^2 + \xi_{\beta}^2 (p_1^2 \sigma_1^2 + p_2^2 \sigma_2^2 - 2 p_1 p_2 \rho \sigma_1 \sigma_2) ,$$

$$(6.44) \quad b = 2 \{ w(p_1 \mu_1 - p_2 \mu_2) - p_1 p_2 \mu_1 \mu_2 + p_2^2 \mu_2^2 + \xi_{\beta}^2 (-p_2^2 \sigma_2^2 + p_1 p_2 \rho \sigma_1 \sigma_2) \} ,$$

$$(6.45) \quad c = - (w - p_2 \mu_2)^2 + \xi_{\beta}^2 p_2^2 \sigma_2^2$$

is.

De grootte  $x$ , die wij in ons probleem kunnen kiezen, moet dus voldoen aan een ongelijkheid van de tweede graad en aan

$$(6.46) \quad 0 \leq x \leq 1$$

Men kan het wiskundige probleem,  $\xi_y$  maximaliseren onder de voorwaarden (6.42) en (6.46), algemeen oplossen. Wij zullen dit hier niet doen en ons beperken tot de bespreking van een aantal speciale gevallen.

#### Oplossing van het probleem in een aantal speciale gevallen

a) Het geval waarin  $p_1 \mu_1 = p_2 \mu_2$  en  $p_1^2 \sigma_1^2 = p_2^2 \sigma_2^2$

De opbrengst in geld wanneer men het gehele land van 1 ha met tarwe bezaaid heeft, bedraagt  $p_1 v_1$  en wanneer men dit doet met haver  $p_2 v_2$ . Zonder moeite is in te zien, dat  $p_1 v_1$  een  $N(p_1 \mu_1, p_1^2 \sigma_1^2)$ -verdeling bezit en  $p_2 v_2$  een  $N(p_2 \mu_2, p_2^2 \sigma_2^2)$ -verdeling. Als dus  $p_1 \mu_1 = p_2 \mu_2$  en  $p_1^2 \sigma_1^2 = p_2^2 \sigma_2^2$  is, bezitten  $p_1 v_1$  en  $p_2 v_2$  dezelfde kansverdeling. Men is wellicht geneigd te denken dat het er niet meer toe doet of men tarwe of haver dan wel gedeeltelijk het één en gedeeltelijk het andere zaait. Toch is dit niet het geval. Men kan dit inzien door de verdeling van  $y$  te onderzoeken voor verschillende waarden van  $x$ .

Voor iedere waarde van  $x$  bedraagt, volgens (6.32), de verwachting van  $y$ :  $\xi_y = p_1 \mu_1 = p_2 \mu_2$ . De variantie gaat echter over in (zie (6.33))

$$(6.47) \quad \sigma^2(y) = p_1^2 \sigma_1^2 \{1 - 2x(1-x)(1-\rho)\}$$

en blijft dus een functie van  $x$ .

Men kan de overgebleven vrijheid nu gebruiken om de variantie van  $\underline{y}$  zo groot of zo klein mogelijk te maken. In het eerste geval speculeert men op een zeer hoge opbrengst, in het tweede geval maakt men de kans op een slecht resultaat zo klein mogelijk. Wij stelden ons op het voorzichtige standpunt en dat betekent dus dat wij  $\sigma^2(\underline{y})$  moeten minimaliseren.

Door differentiatie van (6.47) naar  $x$  vindt men dat  $\sigma^2(\underline{y})$  minimaal is voor  $x = \frac{1}{2}$ . De optimale oplossing is hier dus onafhankelijk van  $\beta$  en  $w$ ; wij noemen deze oplossing daarom uniform optimaal. Een duidelijke illustratie wordt gegeven door figuur 6.6, waarin voor verschillende waarden van  $x$  de cumulatieve verdelingsfunctie  $F(y)$  van  $\underline{y}$  is getekend. Zo leest men direct uit deze figuur af dat de kleinste waarde van  $\beta$  voor een bepaalde waarde  $w_1$  ( $< p_1 \mu_1$ ) van  $w$  bereikt wordt bij die keuze van  $x$  waarvoor  $\sigma(\underline{y})$  minimaal is.

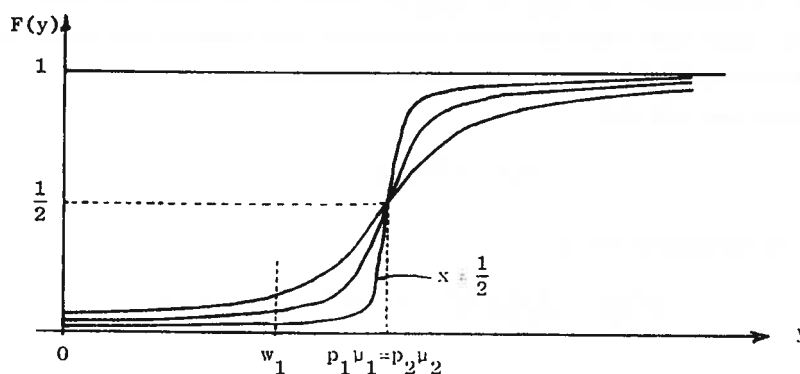


fig. 6.6

De cumulatieve verdelingsfunctie van  $\underline{y}$   
voor verschillende waarden van  $x$

De bovenstaande oplossing geldt ook voor iedere waarde van  $\rho$ . Wel blijft de kleinste variantie die bereikt kan worden een functie van  $\rho$ . Immers bij de keuze  $x = \frac{1}{2}$ , gaat (6.47) over in

$$(6.48) \quad \sigma^2(\underline{y})_{\min} = \frac{1}{2} p_1^2 \sigma_1^2 (1+\rho) .$$

Het minimum ligt dus lager naarmate de waarde van  $\rho$  kleiner is. Men kan dit ook als volgt zeggen: door twee verschillende produkten te verbouwen, waarvan de opbrengsten niet op dezelfde wijze door de toevallige omstandigheden beïnvloed worden, kunnen wij eventuele risico's verdelen; dit gaat des te beter, naarmate de opbrengsten minder samenhangen ( $\rho$  kleiner is).

Vergelijken wij de hier gevonden resultaten met die, gevonden in het eenvoudigste geval, dan zien wij dat daar bij  $p_1 \mu_1 = p_2 \mu_2$  van de vrijheid in de keuze van  $x$  geen nuttig gebruik kon worden gemaakt, terwijl er hier een uniform optimale oplossing is gevonden voor  $x = \frac{1}{2}$ .

b) Het geval waarin  $p_1 \mu_1 = p_2 \mu_2$ , doch  $p_1^2 \sigma_1^2 \neq p_2^2 \sigma_2^2$

De verdelingen van  $p_1 v_{1-1}$  en  $p_2 v_{2-2}$  bezitten nu wel dezelfde verwachting, maar niet meer dezelfde variantie. Het bepalen van de optimale oplossing gaat echter op dezelfde wijze als in a).

Neemt men aan dat

$$(6.49) \quad p_1 \sigma_1 = k p_2 \sigma_2 ,$$

dan is de variantie van  $\underline{y}$

$$(6.50) \quad \sigma^2(\underline{y}) = p_2^2 \sigma_2^2 \{ k^2 x^2 + (1-x)^2 + 2x(1-x)k\rho \} .$$

Deze is minimaal voor

$$(6.51) \quad x = \frac{1-k\rho}{k^2+1-2k\rho} .$$

Wanneer deze  $x$  tussen 0 en 1 ligt, geeft (6.51) de optimale waarde van  $x$ ; in het andere geval moet men hetzij  $x = 0$ , hetzij  $x = 1$  kiezen.

Substitueert men in (6.51)  $k = 1$ , dan vindt men weer voor de optimale waarde van  $x$ :  $x = \frac{1}{2}$ .

Ook oplossing (6.51) is uniform optimaal, d.w.z. geldig voor

iedere combinatie van  $w$  en  $\beta$ . Het is echter mogelijk dat men zijn eisen zodanig heeft gesteld dat er ook door de gunstigste  $x$  niet aan wordt voldaan; men zal dan hetzij de eisen moeten verlichten, hetzij van het produktieproces moeten afzien. In gevallen waarin het minimum van (6.50) voor  $0 \leq x \leq 1$  niet op de rand van dit interval wordt bereikt, kan men in de situatie verkeren dat zowel alleen tarwe als alleen haver verbouwen te grote risico's oplevert, doch dat het risico bij gedeeltelijk haver en gedeeltelijk tarwe verbouwen wel aanvaardbaar is.

c) Geen onderstellingen omtrent verwachtingen en varianties

Wij hebben reeds aangegeven op welke wijze de optimale  $x$  kan worden berekend. Deze is nu niet meer zoals in de voorbeelden a) en b) uniform optimaal, doch een functie van  $\beta$  en  $w$ . De berekening is niet moeilijk, maar door het grote aantal mogelijkheden wat de constanten  $a$ ,  $b$  en  $c$  uit (6.42) betreft, wel vrij langdradig en zal daarom niet worden gegeven.

Bovendien is het niet zeker, dat het berekenen van een optimale  $x$  inderdaad weergeeft wat men eigenlijk wil doen. Immers de waarden van  $w$  en vooral die van  $\beta$  liggen minder nauwkeurig vast dan tot nu toe werd gesuggereerd. De eisen voor  $w$  volgen nog hoofdzakelijk uit redelijk bekende gegevens, maar  $\beta$  drukt uit welke kans op een zeer slechte oogst men wil aanvaarden. Zou men door de verwachting van  $y$  iets onder het te bereiken maximum te kiezen de kans op een resultaat kleiner dan  $w$  aanzienlijk verlagen, dan zal men dit zeker in overweging nemen. Hetzelfde geldt wanneer het bereikbare maximum sterk stijgt bij een geringe verhoging van  $\beta$ . Men wil dus eigenlijk voor gegeven  $w$  in een grafiek zien hoe de samenhang is tussen  $\beta$  en het maximum van  $\mathcal{E}_y$  over de toegelaten  $x$ .

Het maximum van  $\mathcal{E}_y$  en  $\beta$  hangen samen via de toegelaten waarden van  $x$ . De verwachting van  $y$  is een lineaire functie van  $x$ . Ook het verband tussen de toegelaten  $x$ 'en en  $\beta$  is zonder moeite op te sporen. Als bij een bepaalde  $\beta$  een verzameling van  $x$ 'en toegelaten is, dan

zullen deze  $x$ 'en zeker toegelaten zijn wanneer men zijn eisen lager stelt, d.w.z. een grotere kans  $\beta$  op een opbrengst kleiner dan  $w$  accepteert. De verzameling van toegelaten  $x$ 'en zal dus groter worden of gelijk blijven wanneer  $\beta$  toeneemt. Hieruit volgt dat ook het maximum van  $\mathcal{E}_y$  zeker niet kleiner wordt bij stijgende  $\beta$ , m.a.w. dit maximum is een monotoon niet dalende functie van  $\beta$ .

Het interessantste geval is dat, waarin bij toenemende  $\mathcal{E}_y$  ook  $\sigma^2(y)$  toeneemt, waarin dus een hogere verwachte opbrengst samengaat met een groter risico. In figuur 6.7 zijn enige bereikbare cumulatieve verdelingsfuncties van  $y$  getekend. De snijpunten van de getekende krommen met de rechte  $y = w$  geven aan hoe groot  $\beta$  is; aangezien  $y$  een symmetrische verdeling bezit, kan men de waarden van  $\mathcal{E}_y$  aflezen uit de snijpunten van de krommen met  $F(y) = \frac{1}{2}$ . Figuur 6.7 illustreert daardoor duidelijk op welke wijze  $\beta$  verloopt bij toenemende waarde van  $\mathcal{E}_y$ .

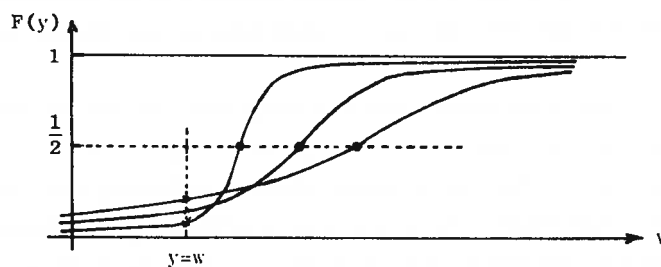


fig. 6.7

De cumulatieve verdelingsfunctie van  $y$   
voor verschillende waarden van  $x$

Aan de hand van een voorbeeld illustreren wij tenslotte op welke wijze men het verloop van  $\max_x \mathcal{E}_y$  kan vinden als functie van  $\beta$ . Hierbij moeten wij gebruik maken van de algemeen geldende formules (6.32) en (6.41) t/m (6.45).

Het is niet nodig alle in de formules (6.42) t/m (6.45) voor-



komende constanten afzonderlijk te kennen. Het is voldoende wanneer de volgende verhoudingen en gegevens bekend zijn:

$$\begin{aligned}
 p_2 \mu_2 &= 0,85 \cdot p_1 \mu_1, \\
 p_1 \sigma_1 &= 0,5 \cdot p_1 \mu_1, \\
 (6.52) \quad p_2 \sigma_2 &= 0,25 \cdot p_1 \mu_1, \\
 w &= 0,35 \cdot p_1 \mu_1, \\
 \rho &= 0,5.
 \end{aligned}$$

Wij hebben dus  $p_2 \mu_2$ ,  $p_1 \sigma_1$ ,  $p_2 \sigma_2$  en  $w$  uitgedrukt in  $p_1 \mu_1$ , de verwachte opbrengst in geld, wanneer alleen tarwe wordt verbouwd. De verwachte opbrengst (steeds in geld) van haver is dus minder dan de verwachte opbrengst van tarwe, doch de standaardafwijking van de laatste is aanzienlijk groter. De opbrengst die wij, behoudens een kans  $\beta$ , zeker willen behalen is 35% van de verwachte opbrengst, wanneer wij alleen tarwe verbouwen.

Substitueren wij (6.52) in de formules (6.43), (6.44) en (6.45), dan vinden wij

$$(6.53) \quad a = (0,1875 \xi_\beta^2 - 0,0225) p_1^2 \mu_1^2,$$

$$(6.54) \quad b = -0,15 \cdot p_1^2 \mu_1^2,$$

$$(6.55) \quad c = (0,0625 \xi_\beta^2 - 0,25) p_1^2 \mu_1^2.$$

Reeds eerder merkten wij op dat de eisen betreffende  $w$  en  $\beta$  niet willekeurig hoog kunnen worden gesteld. Wij gaan daarom eerst na welke waarden van  $\beta$  bij de gegeven  $w$  bereikt kunnen worden. Hiertoe schrijven wij voorwaarde (6.42) in de vorm

$$(6.56) \quad a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \leq 0.$$

Voor  $a > 0$  is dit een parabool met een minimum, groot  $c - \frac{b^2}{4a}$ , dat

bereikt wordt voor  $x = -\frac{b}{2a}$ . Voor kleine waarden van  $\beta$  is (6.53)  $> 0$  \*) en dus kan er aan (6.56) niet worden voldaan wanneer  $c - \frac{b^2}{4a} > 0$  is. Hieruit volgt dat er slechts toegelaten waarden van  $x$  zijn wanneer geldt  $\xi_\beta^2 \leq 4,12$ . Uit een tabel van de normale verdeling kan worden gevonden dat dan  $\beta \geq 0,0212$  moet zijn. De kleinste waarde  $\beta_0$  van  $\beta$ , waarbij nog een oplossing mogelijk is, bedraagt dus  $\beta_0 = 0,0212$ , een waarde die wordt bereikt voor

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{0,15}{2(0,1875 \cdot 4,12 - 0,0225)} = 0,1.$$

Wanneer men  $\beta > \beta_0$  kiest, zal men een interval  $x_1 \leq x \leq x_2$  van  $x$ 'en ter beschikking krijgen en dan moet men dus nagaan voor welke  $x$  de functie  $\xi_y$  maximaal is. Uit

$$(6.57) \quad \xi_y = xp_1\mu_1 + (1-x)p_2\mu_2 = (0,85 + 0,15x)p_1\mu_1$$

leest men af dat dit het geval is voor de grootste toegelaten waarde van  $x$ . Groter dan 1 kan deze waarde nooit worden, omdat ook aan  $0 \leq x \leq 1$  voldaan moet zijn. Het heeft daarom geen zin waarden van  $\beta$  te beschouwen waarvoor de bovengrens  $x_2$  van het interval  $x_1 \leq x \leq x_2$  groter is dan 1. De waarde  $\beta_1$  van  $\beta$ , welke behoort bij  $x_2 = 1$  vinden wij door in (6.42)  $x = 1$  in te vullen; het linkerlid moet dan 0 worden. Men vindt op deze wijze  $\beta_1 = 0,0968$ . Het interval van  $\beta$ 's waarvoor het gedrag van  $\max_x \xi_y$  moet worden nagegaan, is dus  $0,0212 \leq \beta \leq 0,0968$ .

Voor de waarden 0,0212; 0,04; 0,06; 0,08 en 0,0968 van  $\beta$  is de grootste wortel van  $ax^2 + bx + c = 0$  berekend, evenals de bijbehorende waarde van  $\xi_y$ . Figuur 6.8 geeft het verband tussen  $\max_x \xi_y$  en  $\beta$ , waarbij wij langs de verticale as als eenheid gebruiken  $p_1\mu_1$ . Wij zien dat  $\max_x \xi_y$  bij toenemende  $\beta$  stijgt van  $0,865 \cdot p_1\mu_1$  tot  $p_1\mu_1$  en dat alleen haver verbouwen nooit optimaal is, in tegenstelling tot alleen tarwe verbouwen, wat de optimale oplossing is bij  $\beta = 0,0968$ .

\*) Men kan achteraf laten zien dat  $a$  voor alle in aanmerking komende waarden van  $\beta$  inderdaad  $> 0$  is.

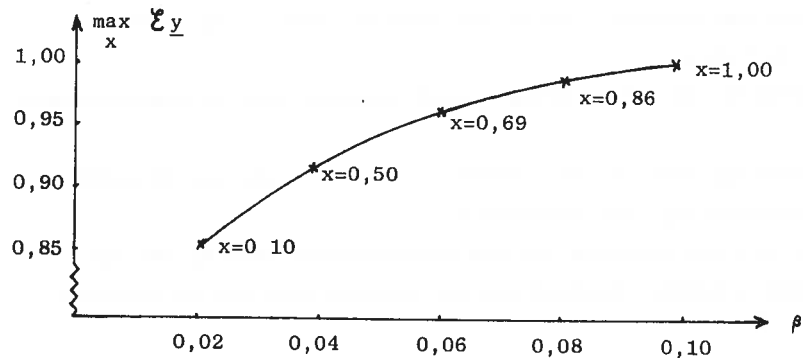


fig. 6.8

Verwachting van de opbrengst als functie van  $\beta$  bij optimale  $x$

Andere voorbeelden kunnen op geheel analoge wijze worden uitgewerkt.

#### Voorbeeld 6.5

Dit voorbeeld is een iets vereenvoudigde versie van voorbeeld 2.4 (zie ook blz. 9 en 10).

Een inkoper van een speciaalzaak in dameshoedjes gaat ieder najaar naar Parijs om één type hoedje te bestellen. Deze hoedjes worden dan het volgende voorjaar tussen 1 februari en 1 juli in de normale verkoop gebracht. Tijdens de uitverkoop (1 - 15 juli) worden de hoedjes tegen een sterk gereduceerde prijs aangeboden. De ervaring leert dat alle restanten in de uitverkoop kunnen worden opgeruimd.

In elk najaar moet de inkoper dus beslissen hoeveel hoedjes hij zal bestellen. Zijn keuze zal afhangen van de volgende gegevens

- 1) de inkoopkosten bedragen  $\phi(x)$  voor een partij van de omvang  $x$ ;
- 2) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt  $a_1$ ;
- 3) de verkoopprijs in de uitverkoop bedraagt  $a_2$  per hoedje;
- 4) de voorraadkosten bedragen  $b$  voor ieder hoedje dat een geheel

- seizoen in voorraad is (wij denken hierbij in de eerste plaats niet aan rentederving, maar aan huur voorraadruimte, etc.);
- 5) de schade aan goodwill, welke het modehuis door "neen-verkoop" lijdt, bedraagt  $c$ ;
- 6) de kansverdeling van de vraag  $v$  wordt gegeven door de kansdichtheid  $f(v)$ .

De kansverdeling onder 6) is uiteraard een benadering van de werkelijke vraagverdeling, die discreet is.

Laten wij ons beperken tot één toestandsgrootte en wel die, welke aangeeft hoeveel hoedjes van het bewuste type nog in voorraad zijn.

Uitgaande van de model-veronderstelling dat de vraag gelijkmatig over de periode 1 februari - 1 juli is verspreid, zullen wij de volgende twee alternatieve mogelijkheden aan een beschouwing onderwerpen.

- a) In de behoefte kan door de voorraad worden voorzien ( $v \leq x$ ).

Als de vraag naar hoedjes in de periode 1 februari - 1 juli  $v$  bedraagt, dan wordt de ontwikkeling in de toestand van het systeem aangegeven in figuur 6.9.

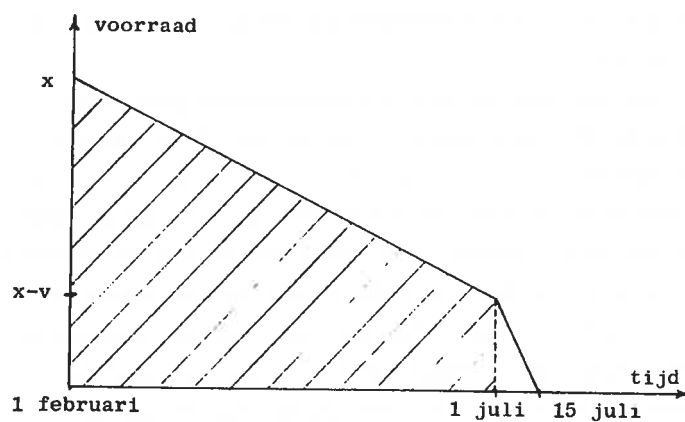


fig. 6.9

Ontwikkeling in de toestand van het systeem

Indien wij de voorraadkosten voor de uitverkoop-periode verwaarlozen en indien wij de voorraadkosten steeds berekenen over de restant-voorraad, dan zijn deze kosten evenredig met het oppervlak van het gearceerde gebied (zie figuur 6.9); dit is  $\frac{x + (x - v)}{2}$  als de lengte van de periode 1 februari - 1 juli gelijk aan 1 wordt gekozen. Bijgevolg worden de voorraadkosten gegeven door

$$(6.58) \quad \frac{x + (x - v)}{2} b = (x - \frac{v}{2})b .$$

De inkoopkosten bedragen  $\phi(x)$ , terwijl de inkomsten gegeven worden door

$$(6.59) \quad a_1 v + a_2 (x - v) .$$

Wij kunnen derhalve aan deze realisering van de ontwikkeling in de toestand van het systeem de volgende waardering (winst) toekennen

$$(6.60) \quad a_1 v + a_2 (x - v) - \phi(x) - (x - \frac{v}{2})b .$$

b) In de behoefte kan niet door de voorraad worden voorzien ( $v > x$ ).

Als de vraag naar hoedjes in de periode 1 februari - 1 juli wederom  $v$  bedraagt, dan wordt de ontwikkeling in de toestand van het systeem aangegeven in figuur 6.10.

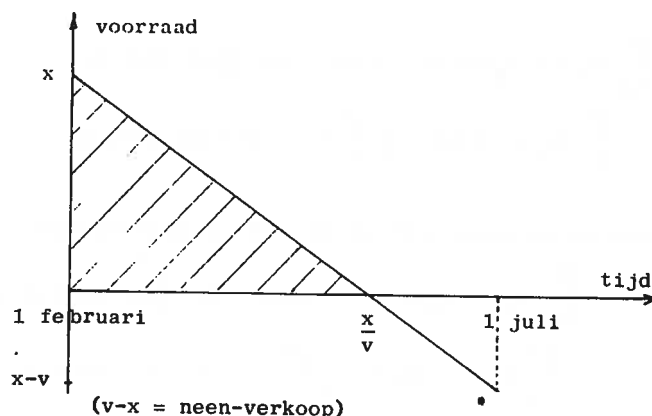


fig. 6.10

Ontwikkeling in de toestand van het systeem

De voorraadkosten zijn ook nu evenredig met het oppervlak van het gearceerde gebied; dit is  $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{v} = \frac{1}{2} \frac{x^2}{v}$ . Bijgevolg worden de voorraadkosten gegeven door  $\frac{1}{2} \frac{x^2}{v} b$ . De inkoopkosten bedragen  $\phi(x)$ , terwijl het verlies aan goodwill gegeven wordt door  $c(v-x)$ . Voor de inkomsten vinden wij  $ax_1$ . Wij kunnen derhalve aan deze realisering van de ontwikkeling in de toestand van het systeem de volgende waardering (winst) toekennen

$$(6.61) \quad a_1 x - \phi(x) - \frac{1}{2} \frac{x^2}{v} b - c(v-x) .$$

Samenvattende: als de vraag naar hoedjes in de periode 1 februari - 1 juli  $v$  bedraagt, dan wordt de toe te kennen waardering aan een realisering van de ontwikkeling in de toestand van het systeem gegeven door

$$(6.62) \quad \begin{aligned} a_1 v + a_2(x-v) - \phi(x) - (x - \frac{v}{2})b & \quad \text{als } v \leq x \\ a_1 x - \phi(x) - \frac{1}{2} \frac{x^2}{v} b - c(v-x) & \quad \text{als } v \geq x . \end{aligned}$$

Aangezien de vraag  $v$  stochastisch is, is ook de ontwikkeling in de toestand van het systeem niet van te voren bekend. Het ligt voor de hand om aan deze stochastische ontwikkeling de verwachting van de winst als waardering toe te kennen. Wij vinden derhalve voor de waardering

$$(6.63) \quad \begin{aligned} & \int_0^x \{a_1 v + a_2(x-v) - \phi(x) - (x - \frac{v}{2})b\} f(v) dv + \\ & + \int_x^\infty \{a_1 x - \phi(x) - \frac{1}{2} \frac{x^2}{v} b - c(v-x)\} f(v) dv . \end{aligned}$$

Het criterium voor de optimale beslissing wordt nu gegeven door

$$(6.64) \quad \begin{aligned} y(S_0; x) = & \int_0^x \{a_1 v + a_2(x-v) - \phi(x) - (x - \frac{v}{2})b\} f(v) dv + \\ & + \int_x^\infty \{a_1 x - \phi(x) - \frac{1}{2} \frac{x^2}{v} b - c(v-x)\} f(v) dv . \end{aligned}$$

Het wiskundige optimumprobleem luidt nu als volgt:

"Bepaal het maximum van (6.64)".

Met behulp van de differentiaalrekening kan men aantonen dat voor de gezochte waarde van  $x$  moet gelden

$$(6.65) \quad \frac{dy(s_0, x)}{dx} = 0$$

of

$$(6.66) \quad a_2 - b + \int_x^{\infty} (a_1 + c - \frac{bx}{v} - a_2 + b) f(v) dv - \phi'(x) = 0 .$$

Van het bovenstaand resultaat zullen wij thans een toepassing bespreken. Wij zullen uitgaan van de volgende gegevens

- 1) de inkoopprijs van een hoedje bedraagt dertig gulden, m.a.w.  
 $\phi(x) = 30x$ ;
- 2) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt vijftig gulden,  
m.a.w.  $a_1 = 50$ ;
- 3) de verkoopprijs in de uitverkoop is twintig gulden, m.a.w.  
 $a_2 = 20$ ;
- 4) de voorraadkosten bedragen vijf gulden per seizoen per hoedje,  
m.a.w.  $b = 5$ ;
- 5) de kansverdeling van de vraag wordt gegeven door de gamma-verdeling

$$(6.67) \quad f(v) = (0,02)^2 v e^{-0,02v}$$

(de verwachte vraag is dus 100 hoedjes);

- 6) het verlies  $c$  aan goodwill voor ieder hoedje te weinig in voorraad, wordt achtereenvolgens getaxeerd op 0, 5, 10, 15, 20, 25 en 30 gulden.

De relatie (6.66) wordt voor deze toepassing gegeven door

$$(6.68) \quad (35+c) \int_x^{\infty} (0,02)^2 v e^{-0,02v} dv - 5x \int_x^{\infty} (0,02)^2 e^{-0,02v} dv = 15 .$$

Na enig rekenwerk gaat (6.68) over in

$$(6.69) \quad (0,6 + 0,02c)xe^{-0,02x} + (35 + c)e^{-0,02x} = 15 .$$

Indien wij deze vergelijking oplossen naar  $x$ , dan vinden wij het reeds op blz. 34 vermelde resultaat, (zie tabel 4.1).

#### Voorbeeld 6.6

In dit voorbeeld zullen wij aannemen, dat wij belast zijn met de inkoop van grondstoffen voor een grossier. Voor de eenvoud zullen wij ons beperken tot één soort grondstof, die in elke gewenste hoeveelheid op vastgestelde tijdstippen bijv. op de eerste dag van de maand kan worden ingekocht.

De behoefte aan deze grondstof wordt eerst constant verondersteld, maar later zullen wij aannemen dat de vraag een kansverdeling volgt.

Wanneer er op een gegeven ogenblik geen voldoende voorraad aanwezig is, treedt er in de verkoop een stagnatie op welke zeer nadelig is. Met de aflevering van de door de klanten bestelde goederen moet dan worden gewacht totdat er weer nieuwe grondstoffen ontvangen zijn. Aangezien aangenomen wordt dat de ingekochte goederen direct worden afgeleverd, kan men er steeds voor zorgen, dat bij de aanvang van de nieuwe periode geen tekort aan grondstoffen bestaat.

Het behoort nu tot onze taak om de omvang van de te bestellen hoeveelheden te bepalen.

#### Oplossing:

Indien de inkoopkosten voor een partij van de grootte  $x$  worden gegeven door  $h(x) = ax$ , dan maakt het op grond van de inkoopkosten niets uit of men uit voorraad verkoopt of nalevert.

Er zijn echter twee soorten kosten welke wel de keuze van de bestelgrootte  $x$  beïnvloeden. In de eerste plaats de voorraadkosten, welke  $c_1$  bedragen voor iedere eenheid één tijdseenheid in voorraad. Deze kosten worden o.a. gevormd door de rentederving van het in de goederen geïnvesteerde kapitaal. Vervolgens worden er boeten geheven van de grootte  $c_2$  voor elke eenheid één tijdseenheid te laat afgeleverd.



Enerzijds zullen wij bij de bepaling van de ordergrootte trachten een eventuele achterstand te voorkomen, terwijl wij er aan de andere kant voor willen waken dat onze voorraden niet te groot worden. In onze voorraadpolitiek moeten wij aan deze tegengestelde verlangens op een zodanige wijze tegemoet komen, dat de totale kosten aan de voorraadvorming verbonden minimaal zijn.

Doordat het steeds slechts mogelijk is op van te voren vastgestelde tijdstippen  $\theta_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) goederen te kopen, ontstaan er tijdsintervallen tussen deze tijdstippen. Voor de eenvoud kiezen wij de tijdsduur van deze intervallen gelijk aan de tijdseenheid.

Met  $r_0$  geven wij de restantvoorraad aan op het besteltijdstip, terwijl  $r_1$  de restantvoorraad aangeeft aan het eind van het interval. Indien wij de ordergrootte aangeven met  $x$ , dan zal de voorraad  $q$  na ontvangst van de order

$$(6.70) \quad q = r_0 + x$$

bedragen.

De grootte  $v$  is bestemd voor de vraag gedurende het tijdsinterval. Voor de restantvoorraad  $r_1$  geldt dan

$$(6.71) \quad r_1 = q - v.$$

Bij een niet toereikende voorraad zullen de grootheden  $r_0$  en  $r_1$  negatieve waarden aannemen.

Ons probleem luidt nu: "Hoeveel grondstoffen moeten wij op het besteltijdstip inslaan, opdat de kosten voor de komende periode zo klein mogelijk zijn".

Om deze kosten te berekenen zullen wij twee gevallen onderscheiden

- 1) In de behoefte kan door de voorraad worden voorzien, m.a.w.  $v \leq q$  en dus  $r_1 \geq 0$ .

De gemiddelde voorraad wordt dan gegeven door

$$(6.72) \quad \frac{1}{2}(r_1 + q) = q - \frac{1}{2}v$$

en de daaruit voortkomende voorraadkosten bedragen

$$(6.73) \quad k_1(q) = (q - \frac{1}{2}v)c_1.$$

De functie  $k_1(q)$  is onder de voorwaarde  $v \leq q$  minimaal voor  $q = v$ .  
De minimale waarde van  $k_1(q)$  bedraagt dan  $\frac{1}{2}vc_1$ .

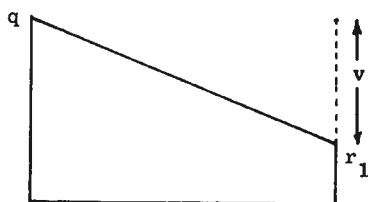


fig. 6.11

Voldoende voorraad

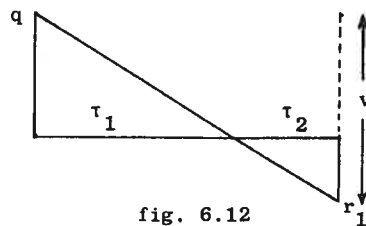


fig. 6.12

Te kleine voorraad

- 2) In de behoefte kan niet geheel door de voorraad worden voorzien,  
m.a.w.  $v > q$  en  $r_1 < 0$ .

Er is gedurende een periode  $\tau_1$  een positieve voorraad en vervolgens een tekort. Als wij wederom aannemen dat de vraag tijdens deze perioden constant is, dan is de gemiddelde voorraad gedurende de periode  $\tau_1$  gelijk aan  $\frac{1}{2}q$  en het gemiddelde tekort tijdens de periode  $\tau_2$  gelijk aan  $\frac{1}{2}|r_1|$  en de totale daaruit voortkomende kosten worden gegeven door

$$(6.74) \quad k_2(q) = \frac{1}{2}q\tau_1c_1 + \frac{1}{2}(v-q)\tau_2c_2.$$

Men kan gemakkelijk nagaan dat voor  $\tau_1$  en  $\tau_2$  resp. gelden de betrekkingen

$$(6.75) \quad \tau_1 = \frac{q}{v}$$

$$(6.76) \quad \tau_2 = \frac{v-q}{v}.$$

Verwerken wij deze resultaten in de betrekking (6.74), dan vinden wij tenslotte voor de totale kosten als  $v > q$  is

$$(6.77) \quad k_2(q) = \frac{1}{2} \left[ \frac{q^2 c_1 + (q-v)^2 c_2}{v} \right] .$$

De totale kosten worden dus gegeven door

$$(6.78) \quad k(q) = \begin{cases} (q - \frac{1}{2}v) c_1 & \text{als } q > v \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{q^2 c_1 + (q-v)^2 c_2}{v} \right] & \text{als } q \leq v . \end{cases}$$

De functie  $k(q)$  is een continue en differentieerbare functie van  $q$ , met

$$(6.79) \quad k'(q) = \begin{cases} c_1 & \text{als } q \geq v \\ \frac{qc_1 + (q-v)c_2}{v} & \text{als } q \leq v . \end{cases}$$

De functie  $k'(q)$  is overal continu en differentieerbaar behalve in  $q = v$ . Nu geldt

$$(6.80) \quad k''(q) = \begin{cases} 0 & \text{als } q > v \\ \frac{c_1 + c_2}{v} > 0 & \text{als } q < v . \end{cases}$$

De functie  $k(q)$  is dus minimaal als voor  $q$  geldt

$$(6.81) \quad k'(q) = 0 \quad \text{of} \quad q = \frac{v c_2}{c_1 + c_2} .$$

Dit betekent dat een voorraad  $v$  kleiner dan de behoefte, optimaal kan zijn. Zoals wij weten is  $q$  de voorraad welke overblijft na opheffing van de eventuele achterstand. De te bestellen hoeveelheid grondstoffen wordt dus gegeven door

$$(6.82) \quad x = q - r_0 .$$

Indien de vraag in iedere periode gelijk is dan zal, als ook in voorgaande perioden met een optimale voorraad  $q = \frac{vc_2}{c_1+c_2}$  gestart wordt, de restantvoorraad  $r_0$  gegeven worden door

$$(6.83) \quad r_0 = - \frac{vc_1}{c_1+c_2} .$$

Uit (6.82) en (6.83) volgt dan tenslotte

$$(6.84) \quad x = \frac{vc_2}{c_1+c_2} + \frac{vc_1}{c_1+c_2} = v .$$

Dit resultaat konden wij uiteraard verwachten.

Veelal echter is de vraag  $v$  geen gegeven getal, maar een stochastische grootte waaraan een kansverdeling is toegevoegd. Ons probleem luidt nu: "Hoeveel grondstoffen moeten wij op het besteltijdstip inslaan, opdat de verwachting van de totale kosten voor de komende periode zo klein mogelijk is". Immers ook deze verwachting zal afhankelijk zijn van de nog te kiezen beginvoorraad  $q$ .

Voor het geval dat de verdelingsfunctie  $F(v)$  een kansdichtheid  $f(v)$  bezit, kan de verwachting van de kosten als volgt worden uitgedrukt

$$(6.85) \quad k(q) = \int_0^q (q - \frac{1}{2}v) c_1 f(v) dv + \int_q^\infty \{ \frac{1}{2}q^2 c_1 + \frac{1}{2}(q-v)^2 c_2 \} \frac{f(v)}{v} dv .$$

Deze betrekking werd opgesteld met behulp van de uitdrukkingen (6.73) en (6.77) <sup>\*)</sup>. Bij het opstellen van deze relatie wordt dus aangenomen dat de vraag voor het gehele tijdsinterval weliswaar stochastisch is, maar het verloop tijdens het tijdsinterval constant is.

Wij zullen nu onze beginvoorraad  $q$  kiezen, dat de verwachting van de te maken onkosten,  $k(q)$ , minimaal wordt; m.a.w. voor de gezochte optimale waarde  $q^*$  van  $q$  moet gelden

<sup>\*)</sup> E. NADDOR, Some models of inventory and an application, Management Science, 2 (1956), nr 4, p. 299 e.v.

$$(6.86) \quad \left. \frac{d k(q)}{d q} \right|_{q=q^*} = 0 .$$

Na een weinig rekenen blijkt (6.86) gelijkwaardig te zijn met

$$(6.87) \quad F(q^*) + q^* \int_{q^*}^{\infty} \frac{f(v)}{v} dv = \frac{c_2}{c_1 + c_2} .$$

Aangezien men kan bewijzen dat

$$(6.88) \quad m(q) \stackrel{\text{def}}{=} F(q) + q \int_q^{\infty} \frac{f(v)}{v} dv$$

een monotoon stijgende functie is van  $q$ , welke voor  $q = 0$  de waarde nul heeft en voor  $q = \infty$  een waarde  $\geq 1$ , is  $q^*$  ondubbelzinnig bepaald. De functie  $k(q)$  heeft dus maar één extremum en aangezien  $k(\infty) = \infty$ , moet dit een minimum zijn. De optimale ordergrootte wordt dan gegeven door

$$(6.89) \quad x^* = q^* - r_0 ,$$

waarbij  $r_0$  op het besteltijdstip bekend is.

In dit voorbeeld hebben wij verondersteld, dat de vraag een continue verdeling bezit. Wij zullen echter in het volgende voorbeeld aantonen dat voor discrete verdelingen op analoge wijze een criterium kan worden opgesteld.

#### Voorbeeld 6.7

Het nu te bespreken probleem is een generalisatie van het vorige probleem. In dat voorbeeld hadden wij verondersteld dat wij belast waren met het beheer van een voorraad grondstoffen, welke op van tevoren gegeven tijdstippen kon worden aangevuld.

Zoals wij reeds vaststelden ontstaan tussen de afleverings-tijdstippen  $\theta_n$  intervallen, waarvan de lengten gelijk zijn aan de tijdseenheid. Wij zullen nu aannemen, dat de levertijd  $k$  tijdseenheden bedraagt; m.a.w. de hoeveelheid goederen  $x_n$ , welke op  $\theta_n$  dient aan te komen, moet men op  $\theta_{n-k}$  bestellen.

Oplossing:

De voorraad op  $\theta_n$ , na ontvangst van de goederen en eventuele opheffing van de achterstand, zal worden aangegeven met  $q_n$ . Deze grootte zal negatieve waarden aannemen, indien de achterstand groter is dan de omvang van de te ontvangen order. De restantvoorraad op  $\theta_n$ , voor de aankomst van de bestelling  $x_n$ , wordt vastgelegd door  $r_{n-1}$ , terwijl de voorraad aan het eind van de periode wordt aangeduid met  $r_n$ . De behoefte aan grondstoffen in de periode  $(\theta_n, \theta_{n+1})$  wordt aangegeven door  $v_n$ .

Wij verkrijgen nu de volgende betrekkingen

$$(6.90) \quad q_n = r_{n-1} + x_n,$$

$$(6.91) \quad r_n = q_n - v_n,$$

$$(6.92) \quad q_n = q_{n-1} + x_n - v_{n-1},$$

$$(6.93) \quad r_n = q_{n-1} + x_n - v_{n-1} - v_n.$$

Doordat men enige tijd van tevoren moet bestellen, kan men slechts op langere termijn invloed uitoefenen op de omvang van de voorraad.

Op het tijdstip  $\theta_{n-k}$  weet men niet hoe groot de behoefte zal zijn in de periode  $(\theta_{n-k}, \theta_n)$ . Het is dan ook niet uitgesloten dat op het tijdstip  $\theta_n$  blijkt, dat een op  $\theta_{n-k}$  gedane bestelling te klein was om het tekort op te heffen, waardoor  $q_n$  negatieve waarden kan aannemen.

Uit (6.90), (6.91), (6.92) en (6.93) volgt onmiddellijk dat

$$(6.94) \quad q_n = q_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} x_i + x_n - \sum_{i=n-k}^{n-1} v_i,$$

en

$$(6.95) \quad r_n = q_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} x_i + x_n - \sum_{i=n-k}^{n-1} v_i - v_n.$$

Wij schrijven nu:

$$(6.96) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{n-k} \stackrel{\text{def}}{=} q_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} x_i \\ t = \sum_{i=n-k}^{n-1} v_i \\ v = v_n . \end{array} \right.$$

De grootheid  $u_{n-k}$  geeft dus op het tijdstip  $\theta_{n-k}$  de som aan van de voorraad en de hoeveelheid reeds in bestelling. De betrekkingen (6.94) en (6.95) gaan dan over in

$$(6.97) \quad q_n = u_{n-k} + x_n - t = w_n - t$$

en

$$(6.98) \quad r_n = u_{n-k} + x_n - v - t = w_n - v - t ,$$

waarbij

$$(6.99) \quad w_n \stackrel{\text{def}}{=} u_{n-k} + x_n .$$

De variabelen  $t$  en  $v$  stellen resp. de behoeften aan grondstoffen voor in de  $k$  tussenliggende perioden en in de  $n^{\text{de}}$  periode. Vervolgens veronderstellen wij dat deze variabelen resp. de verdelingsfuncties  $G(t)$  en  $F(v)$  bezitten. Het probleem luidt nu weer: "Kies  $x_n$  zodanig dat de verwachting van de te maken onkosten minimaal wordt".

Er kunnen zich in de  $n^{\text{de}}$  periode drie gevallen voordoen, nl.

- 1) De behoefte kan uit de voorraad worden gedekt; m.a.w.

$$q_n = w_n - t \geq 0 \quad \text{en} \quad v_n = v \leq w_n - t .$$

- 2) Er is weliswaar aan het begin van de  $n^{\text{de}}$  periode een voorraad, maar aan het eind een tekort; m.a.w.

$$q_n = w_n - t \geq 0 \quad \text{en} \quad v > q_n = w_n - t .$$

- 3) De afgeleverde bestelling op het tijdstip  $\theta_n$  was niet voldoende om het op dat moment al bestaande tekort op te heffen, zodat er gedurende de gehele periode een tekort is; m.a.w.

$$q_n = w_n - t < 0 \quad \text{en} \quad v > q_n = w_n - t .$$

In de figuren 6.13, 6.14 en 6.15 zijn deze 3 mogelijkheden aangegeven.

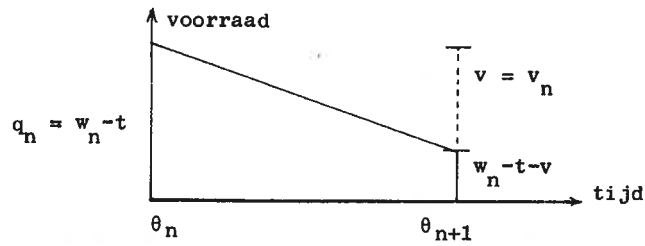


fig. 6.13

Het verloop bij positieve beginvoorraad en positieve eindvoorraad

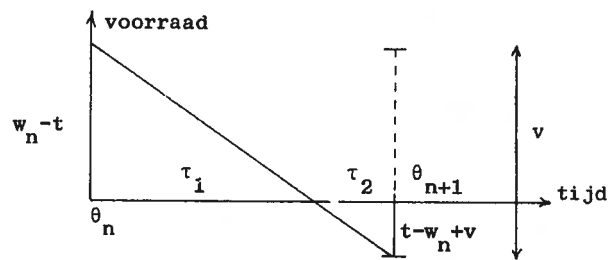


fig. 6.14

Het verloop bij positieve beginvoorraad en negatieve eindvoorraad

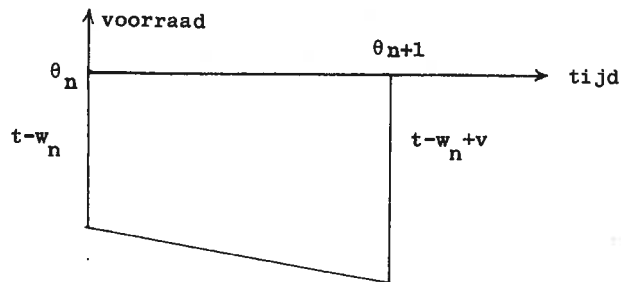


fig. 6.15

Het verloop bij negatieve beginvoorraad en negatieve eindvoorraad



Ook nu berekenen wij eerst voor deze gevallen afzonderlijk de kostenfunctie, alsof de behoefte in de  $n^{\text{de}}$  periode een gegeven waarde bezit.

In het eerste geval is de gemiddelde voorraad gelijk aan  $w_n - t - \frac{1}{2}v$ . De daaruit voortvloeiende kosten bedragen

$$(6.100) \quad (w_n - t - \frac{1}{2}v)c_1 .$$

In het tweede geval is er gedurende de periode  $\tau_1$  een positieve voorraad en wel gemiddeld  $\frac{1}{2}(w_n - t)$  en tijdens de periode  $\tau_2$  een gemiddeld tekort van  $\frac{1}{2}(t - w_n + v)$ . De totale kosten bedragen dan

$$(6.101) \quad \frac{1}{2}(w_n - t)\tau_1 c_1 + \frac{1}{2}(t - w_n + v)\tau_2 c_2 .$$

Wederom geldt

$$(6.102) \quad \tau_1 = \frac{w_n - t}{v}$$

en

$$(6.103) \quad \tau_2 = \frac{t - w_n + v}{v} .$$

De betrekking (6.102) gaat dan over in

$$(6.104) \quad \frac{1}{2} \frac{(w_n - t)^2}{v} c_1 + \frac{1}{2} \frac{(t - w_n + v)^2}{v} c_2 .$$

In het derde geval is het gemiddelde tekort gelijk aan  $t - w_n + \frac{1}{2}v$ . De daarbij behorende kosten bedragen dan

$$(6.105) \quad (t - w_n + \frac{1}{2}v)c_2 .$$

De grootheden  $v$  en  $t$ , die in deze drie gevallen voorkomen, zijn echter geen bekende getallen, maar variabelen met een kansverdeling.

Stel nu dat de variabelen  $v$  en  $t$  een kansverdeling bezitten met dichtheden resp.  $f(v)$  en  $g(t)$ . De verwachting van de te maken kosten wordt dan gegeven door

$$\begin{aligned}
 (6.106) \quad k(w_n) = & c_1 \int_0^{w_n} g(t) dt \int_0^{w_n-t} (w_n-t-\frac{1}{2}v) f(v) dv + \\
 & + \frac{1}{2}c_1 \int_0^{w_n} g(t) dt \int_{w_n-t}^{\infty} \frac{(w_n-t)^2}{v} f(v) dv + \\
 & + \frac{1}{2}c_2 \int_0^{w_n} g(t) dt \int_{w_n-t}^{\infty} \frac{(t-w_n+v)^2}{v} f(v) dv + \\
 & + c_2 \int_{w_n}^{\infty} g(t) dt \int_0^{\infty} (t-w_n+\frac{1}{2}v) f(v) dv .
 \end{aligned}$$

Wij kiezen  $w_n$  (vgl. (6.99)) nu zodanig dat  $k(w_n)$  minimaal wordt.  
 $w_n$  moet dus voldoen aan

$$(6.107) \quad \left. \frac{d k(w_n)}{d w_n} \right|_{w_n = w_n^*} = 0 .$$

Deze vergelijking blijkt na enige berekeningen gelijkwaardig te zijn met

$$(6.108) \quad \int_0^{w_n^*} g(t) dt \left[ \int_0^{w_n^*-t} f(v) dv + (w_n^*-t) \int_{w_n^*-t}^{\infty} \frac{f(v)}{v} dv \right] = \frac{c_2}{c_1+c_2} .$$

De functie

$$(6.109) \quad m(w_n) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{w_n} g(t) dt \left[ \int_0^{w_n-t} f(v) dv + (w_n-t) \int_{w_n-t}^{\infty} \frac{f(v)}{v} dv \right]$$

is monotoon stijgend omdat geldt

$$(6.110) \quad m'(w_n) = \int_0^{w_n} g(t) dt \int_{w_n-t}^{\infty} \frac{f(v)}{v} dv > 0$$

De functie  $m(w_n)$  neemt voor  $w_n = 0$  de waarde nul aan en is voor  $w_n = \infty$  gelijk aan 1. Hieruit volgt, dat de optimale waarde van  $w_n$  door de

betrekking (6.108) ondubbelzinnig is vastgelegd.

Aangezien de waarde  $\sum_{i=n-k+1}^{n-1} x_i$  op het tijdstip  $\theta_{n-k}$  bekend is, kan  $x_n$  worden berekend uit

$$(6.111) \quad w_n = q_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} x_i + x_n.$$

Het is ook mogelijk om na te gaan hoe groot de verwachting is van de lengte van de periode  $\tau_1$ , waarin geen tekort is aan grondstoffen.

In het eerste geval zal  $\tau_1$  gelijk zijn aan 1, omdat de voorraad voldoende groot is om in de behoefte te voorzien. In het tweede geval hebben wij gezien dat  $\tau_1$  wordt gegeven door  $\frac{w_n - t}{v}$  en in het derde geval is  $\tau_1$  gelijk aan 0, omdat de  $n^{\text{de}}$  periode wordt begonnen met een tekort.

Voor de verwachting van  $\tau_1$  geldt dus de volgende betrekking

$$(6.112) \quad \mathcal{E}_{\tau_1} = \int_0^{w_n} F(w_n - t)g(t) dt + \int_0^{w_n} (w_n - t)g(t) dt \int_{w_n - t}^{\infty} \frac{f(v)}{v} dv.$$

Uit (6.108) en (6.112) volgt

$$(6.113) \quad \mathcal{E}_{\tau_1} = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

en

$$(6.114) \quad \frac{\mathcal{E}_{\tau_1}}{\mathcal{E}_{\tau_2}} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Van dit voorbeeld zullen wij een toepassing geven.

### Toepassing

Wij veronderstellen dat de levertijd van de door de voorraadbeheerder afgegeven order twee perioden bedraagt. De kansverdeling van de vraag gedurende één periode wordt gegeven door de kansdichtheid

$$(6.115) \quad f(v) = ve^{-v}.$$

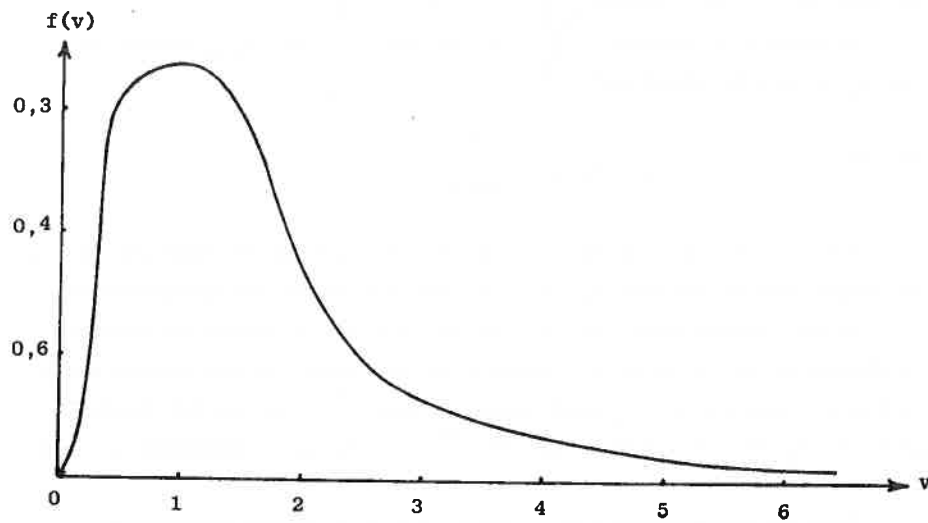


fig. 6.16

De kansverdeling van de vraag per periode  $f(v) = v e^{-v}$

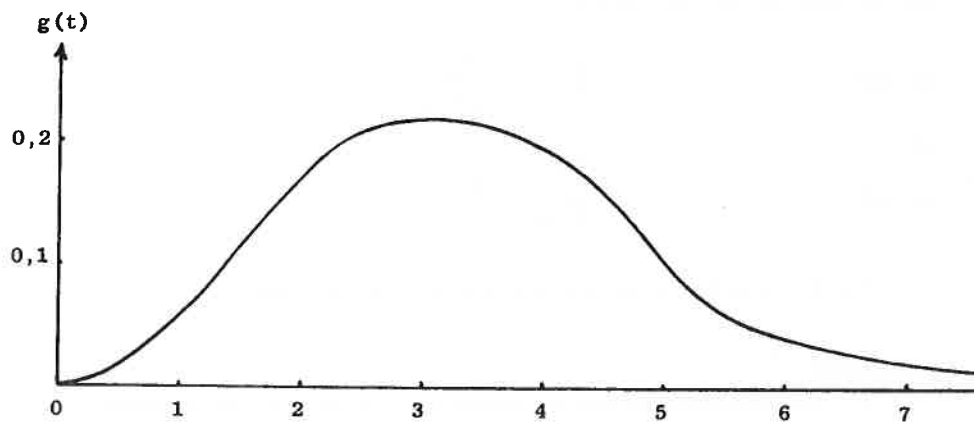


fig. 6.17

De kansverdeling van de vraag tijdens de levertijd  $g(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t}$

De kansverdeling van de vraag gedurende de levertijd wordt gegeven door de kansdichtheid (vgl. fig. 6.17)

$$(6.116) \quad g(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t}.$$

De kansdichtheid  $g(t)$  van de vraag gedurende de levertijd volgt onmiddellijk uit de kansverdeling van de vraag in één enkele periode. Geeft men de vraag in één periode weer aan met  $v$ , dan is bij een levertijd van twee perioden volgens stelling 11.2, deel 2, en (6.115)

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)f(t-v) dv = \int_0^t v e^{-v} (t-v) e^{-(t-v)} dv = \\ &= e^{-t} \int_0^t v(t-v) dv = \frac{1}{6} t^3 e^{-t}. \end{aligned}$$

De vraag luidt nu: "Hoe groot moeten wij op het tijdstip  $\theta_{n-2}$  onze bestelling  $x_n$  kiezen, als gegeven zijn

$$(6.117) \quad c_2 = 19c_1,$$

$$(6.118) \quad q_{n-2} = 3,10,$$

en

$$(6.119) \quad x_{n-1} = 2,70."$$

Uit (6.108), (6.115), (6.116), (6.117), (6.118) en (6.119) volgt

$$(6.120) \quad m(w_n^*) = \int_0^{w_n^*} \frac{1}{6} t^3 e^{-t} dt \left[ \int_0^{w_n^*-t} v e^{-v} dv + (w_n^*-t) \int_{w_n^*-t}^{\infty} e^{-v} dv \right] = 0,95$$

of

$$(6.121) \quad m(w_n^*) = 1 - e^{-w_n^*} \left[ 1 + w_n^* + \frac{w_n^{*2}}{2} + \frac{w_n^{*3}}{6} + \frac{w_n^{*4}}{24} \right] = 0,95.$$

Voor (6.121) kunnen wij ook schrijven

$$(6.122) \quad \int_0^{2w_n^*} \frac{p^4}{4!} e^{-\frac{p}{2}} dp = 0,95.$$

Daar  $\frac{p^4 2^{-5}}{4!} e^{-\frac{p}{2}}$  de verdelingsdichtheid is van een  $\chi^2$ -verdeling met 10 vrijheidsgraden (vgl. formule (7.22), deel 2), is de waarde van  $2w_n^*$  uit de tabel van deze verdeling af te lezen. Wij vinden dan voor  $w_n^*$

$$(6.123) \quad w_n^* = 9,15 .$$

De te bestellen hoeveelheid wordt dan gegeven door

$$(6.124) \quad x_n^* = 9,15 - (3,10 + 2,70) = 3,35 .$$

Wij zullen nu eens nagaan of wij een gelijksoortige methode kunnen ontwikkelen voor het geval  $y$  en  $t$  geen continue, maar discrete verdelingen bezitten met kansen resp.  $p(v)$  en  $r(t)$ .

Wij vinden dan met behulp van de betrekkingen (6.100), (6.104) en (6.105) voor de verwachting van de te maken kosten

$$(6.125) \quad \begin{aligned} k(w_n) = & c_1 \sum_{t=0}^{w_n} r(t) \sum_{v=0}^{w_n-t} (w_n-t-\frac{1}{2}v)p(v) + \\ & + \frac{1}{2}c_1 \sum_{t=0}^{w_n} r(t) \sum_{v=w_n-t+1}^{\infty} \frac{1}{v}(w_n-t)^2 p(v) + \\ & + \frac{1}{2}c_2 \sum_{t=0}^{w_n} r(t) \sum_{v=w_n-t+1}^{\infty} \frac{1}{v}\{v-(w_n-t)\}^2 p(v) + \\ & + c_2 \sum_{t=w_n+1}^{\infty} r(t) \sum_{v=0}^{\infty} (t-w_n+\frac{1}{2}v)p(v) . \end{aligned}$$

De betrekking (6.125) kunnen wij ook als volgt schrijven

$$(6.126) \quad \begin{aligned} k(w_n) = & (c_1+c_2) \sum_{t=0}^{w_n} r(t) \sum_{v=0}^{w_n-t} (w_n-t-\frac{1}{2}v)p(v) + \\ & + (c_1+c_2) \sum_{t=0}^{w_n} r(t) \sum_{v=w_n-t+1}^{\infty} \frac{1}{2v}(w_n-t)^2 p(v) + \end{aligned}$$

$$(6.126) \quad + c_2 \sum_{t=0}^{\infty} r(t) \sum_{v=0}^{\infty} (t - w_n + \frac{1}{2}v) p(v) .$$

Wanneer  $w_n^*$  optimaal is, moet gelden

$$(6.127) \quad k(w_n^* - 1) \geq k(w_n^*)$$

$$(6.128) \quad k(w_n^* + 1) \geq k(w_n^*) .$$

Men kan aantonen, na uitvoerig rekenwerk, dat beide ongelijkheden vervangen kunnen worden door

$$(6.129) \quad m(w_n^* - 1) < \frac{c_2}{c_1 + c_2} < m(w_n^*) ,$$

waarbij

$$(6.130) \quad m(w_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=0}^{w_n} r(t) \left[ \sum_{v=0}^{w_n - t} p(v) + (w_n - t + \frac{1}{2}) \sum_{v=w_n - t + 1}^{\infty} \frac{p(v)}{v} \right]$$

een monotoon stijgende functie van  $w_n$  is.

## 7. Het economisch beslissingsprobleem inzake de beveiliging van Nederland tegen stormvloeden \*)

### Inleiding

Naar aanleiding van de watersnoodramp op 1 februari 1953 gaf de Nederlandse regering aan een commissie van deskundigen (de zg. Delta-commissie) opdracht na te gaan welke maatregelen er genomen moesten worden, teneinde ons land zo goed mogelijk te beveiligen tegen watersnoodrampen. In het kader van haar werkzaamheden verstrekke deze commissie opdrachten aan o.a. het K.N.M.I. in De Bilt, het Waterloopkundig Laboratorium in Delft, het Centraal Planbureau en het Mathematisch Centrum. Twee van de door het Mathematisch Centrum bestudeerde problemen zullen in deze paragraaf worden behandeld.

In het verleden was het gebruikelijk de hoogte van een te bouwen of te verhogen dijk te baseren op de hoogste ter plaatse waargenomen hoogwaterstand. Sinds enkele jaren voor de Tweede Wereldoorlog is men echter gaan inzien, dat ook met hogere waterstanden dan de waargenomene rekening moet worden gehouden. Eén van de opdrachten van de Delta-commissie aan het Mathematisch Centrum betrof nu een onderzoek naar de frequenties van stormvloedstanden van verschillende hoogten. Een andere betrof de vraag een statistisch en economisch verantwoorde basis te verstrekken voor de bepaling der verhoging, welke de dijken langs de Westerschelde en de Rotterdamse Waterweg moesten ondergaan. Beide problemen worden achtereenvolgens besproken.

### 7.1. De frequentielijn van de hoogwaterstanden te Hoek van Holland

#### De frequentieverdeling van alle hoogwaterstanden

Het beschikbare waarnemingsmateriaal bestaat uit waargenomen

---

\*) Deze paragraaf geeft een samenvatting van de bijdragen II.1 en II.2 van het Rapport Deltacommissie (Staatsdrukkerij- en Uitgeverijbedrijf, 1960), resp. getiteld:  
D. VAN DANTZIG en J. HEMELRIJK, Extrapolatie van de overschrijdingslijn van de hoogwaterstanden te Hoek van Holland met behulp van geselecteerde stormen,  
D. VAN DANTZIG en J. KRIENS, Het economisch beslissingsprobleem inzake de beveiliging van Nederland tegen stormvloeden.



hoogwaterstanden \*) (te vinden in de Jaarboeken der Waterhoogten van de Algemene Dienst van de Rijkswaterstaat), voor verschillende plaatsen langs de kust en in de zeearmen. Daar men vooral geïnteresseerd was in de methode van onderzoek, lag het voor de hand een uitvoerige analyse te maken van de hoogwaterstanden op één bepaalde plaats. In onderling overleg werd hiervoor Hoek van Holland gekozen, omdat a) deze plaats centraal ligt ten opzichte van het Deltagebied en Centraal-Holland, b) een lange reeks waarnemingen beschikbaar is en c) de peilschaal zich dicht bij de kust bevindt, waardoor de storende invloeden, die zich verderop in rivieren en zeearmen voordoen, daar niet of althans in mindere mate aanwezig zijn. Door deze keuze beschikte men over ongeveer 49.000 waarnemingen van hoogwaterstanden in de jaren 1888 t/m 1956.

Een analyse van hoogwaterstanden in Hoek van Holland was reeds in 1939 gemaakt door P.J. WEMELSFELDER \*\*). Hierbij onderzocht hij het gemiddelde aantal overschrijdingen,  $n(h)$ , per jaar van het peil  $h$  als functie van dit peil en constateerde dat men, bij het uitzetten van de logaritmen van deze aantallen tegen  $h$ , punten verkreeg die voor niet te kleine waarden van  $h$  in goede benadering op een rechte lijn lagen.

Het lag nu voor de hand eerst na te gaan of dit bij het nieuwe ter beschikking staande materiaal ook nog het geval was. In figuur 7.1 \*\*\* zijn hiertoe langs de horizontale as de verschillende hoogten  $h$  in meters boven N.A.P. uitgezet, terwijl langs de verticale as met logaritmische schaal de gemiddelde aantallen overschrijdingen per jaar zijn aangegeven. De hoogste waargenomen waterstand is 3,85 m (1 februari 1953); het bijbehorende gemiddelde aantal overschrijdingen per jaar is dus voor de betreffende periode  $\frac{1}{69} = 0,0145$ . De daarop volgende is 3,28 m (22 december 1894), met dus een gemiddeld aantal overschrijdingen

\*) Een hoogwaterstand (afkorting: H.W.), is de hoogste stand die gedurende een periode van hoogwater wordt bereikt.

\*\*) P.J. WEMELSFELDER, Wetmatigheden in het optreden van stormvloed, "De Ingenieur", 9 (1939), Bouw- en Waterkunde 3.

\*\*\*) De figuren 7.1 en 7.3 t/m 7.7 zijn aan het eind van de paragraaf opgenomen.

per jaar van  $\frac{2}{69} = 0,0290$ ; etc. De punten die op deze wijze ontstaan, blijken vanaf ongeveer 1,50 m ook voor de in 1956 beschikbare waarnemingen nog vrijwel op een rechte lijn te liggen.

Wij gaan daarom wat dieper in op de inhoud van deze eigenschap en zullen o.a. onderzoeken of er werkelijk in voldoende nauwkeurige mate aan is voldaan.

Er werd dus geconstateerd dat bij het uitzetten van  $\log n(h)$  tegen  $h$ , vanaf een bepaalde hoogte  $h^*$  een vrijwel rechte lijn ontstaat, (zie figuur 7.2). Voor waarden van  $h$  kleiner dan  $h^*$  buigt de rechte af en gaat vrijwel evenwijdig aan de  $h$ -as lopen. Dit is niet verwonderlijk, daar lage waarden van  $h$  uiteraard bij iedere hoogwaterstand worden overschreden.

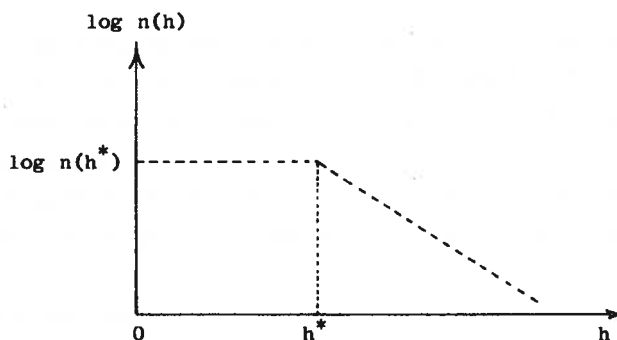


fig. 7.2

Het gemiddelde aantal overschrijdingen per jaar,  
schematisch weergegeven

Wij veronderstellen nu dat het gemiddelde aantal overschrijdingen per jaar van het peil  $h$ , aan te geven door  $n(h)$ , voor  $h \geq h^*$  voldoet aan de betrekking

$$\log n(h) = \log n(h^*) - \frac{1}{a}(h-h^*) ,$$

of

$$(7.1) \quad n(h) = n(h^*) \cdot e^{-\frac{h-h^*}{a}} .$$

Uit deze formule volgt direct, dat voor iedere  $h \geq h^*$  het gemiddelde aantal overschrijdingen  $e$  maal zo klein wordt, wanneer wij het peil  $h$  met  $a$  meter verhogen. Deze verhoging van  $a$  meter wordt daarom de nepereringshoogte genoemd <sup>\*)</sup>.

Alvorens de gemaakte onderstelling omtrent het lineaire verband tussen  $\log n(h)$  en  $h$  nader te onderzoeken, geven wij eerst onze aandacht nog aan een andere vraag. Immers, in veel gevallen is men niet zo zeer geïnteresseerd in het gemiddelde aantal overschrijdingen per jaar van een peil  $h$ , doch veel meer in de kans dat een gegeven peil in een bepaald jaar wordt overschreden. Wij zullen nu echter aantonen, dat deze grootheden voor grote waarden van  $h$  vrijwel aan elkaar gelijk zijn.

Omdat we in veel gevallen slechts een deel van de in een jaar voorkomende waarnemingen zullen beschouwen, bijv. de winterwaarnemingen of de naar depressies geselecteerde waarnemingen (zie blz. 87), kunnen we het aantal waarnemingen per jaar niet constant nemen. In die gevallen is het aantal waarnemingen per jaar stochastisch, d.w.z. er bestaat een kans  $p_n$  op  $n$  waarnemingen in een bepaald jaar. De aantallen waarnemingen voor verschillende jaren worden ondersteld onderling onafhankelijk te zijn.

Zij

$$(7.2) \quad g(h) = P \left[ \underline{h} \geq h \right]$$

de kans op overschrijding van het peil  $h$  bij één waarneming, dan vinden wij voor de kans  $p(h)$  op overschrijding van het peil  $h$  in een geheel jaar

$$(7.3) \quad p(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 1 - \{1 - g(h)\}^n \right] p_n .$$

---

<sup>\*)</sup> Naar JOHN NAPIER, die in 1614 de logaritmen met het grondtal  $e$  invoerde.

Voor grote waarden van  $h$  kan  $\{1-g(h)\}^n$  benaderd worden door  $1-ng(h)$  \*) en er geldt dus

$$(7.4) \quad p(h) \approx \sum_{n=0}^{\infty} ng(h) \cdot p_n.$$

Anderzijds is de voorwaardelijke verwachting van het aantal overschrijdingen van het peil  $h$  per jaar, bij  $n$  waarnemingen, gelijk aan  $ng(h)$  en dus is de onvoorwaardelijke verwachting van het aantal overschrijdingen gelijk aan

$$(7.5) \quad n(h) = \sum_{n=0}^{\infty} ng(h) \cdot p_n.$$

We kunnen dus concluderen dat het verwachte aantal overschrijdingen van een hoog peil  $h$  in één jaar in eerste benadering gelijk is aan de kans op overschrijding van dat peil  $h$  in één jaar.

Beide grootheden kunnen derhalve op dezelfde wijze uit het waarnemingsmateriaal worden geschat. Volgens de gemaakte onderstelling wordt  $n(h)$ , dus ook  $p(h)$ , gegeven door formule (7.1). Wanneer men voor het peil  $h^*$  een keuze heeft gedaan, komen hierin nog twee onbekende parameters voor, te weten  $n(h^*)$  en  $a$ , welke uit de waarnemingen geschat moeten worden. Hierbij beperken wij ons dus tot de waarnemingen  $\geq h^*$ .

Nu is de wijze waarop  $n(h^*)$  geschat wordt van weinig invloed op de uitkomsten en daarom kan men  $n(h^*)$  het beste schatten met een eenvoudige schatter, bijv.

$$(7.6) \quad \hat{n}(h^*) = \frac{n}{m},$$

waarin  $n$  het aantal waarnemingen  $\geq h^*$  is en  $m$  het aantal jaren gedurende welke men heeft waargenomen. Men schat dus met het gemiddeld per jaar opgetreden aantal overschrijdingen van  $h^*$ ; in ons geval

---

\*) Volgens formule (7.15), deel 1, is  
 $\{1-g(h)\}^n = 1 - \binom{n}{1}g(h) + \binom{n}{2}\{g(h)\}^2 + \dots + \{-g(h)\}^n.$

Voor grote  $h$  is  $g(h)$  klein, zodat de termen waarin  $g(h)$  in een hogere dan de eerste graad voorkomt, in eerste benadering verwaarloosd kunnen worden.

heeft  $m$  steeds een waarde tussen 60 en 70.

Als schatter van  $a$  gebruiken wij de meest aannemelijke schatter. In deel 3 is afgeleid, dat deze bij  $n$  waarnemingen gelijk is aan

$$(7.7) \quad \hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i - h^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i - h^*$$

(vgl. formule (13.12), deel 3, met  $a = \frac{1}{\lambda}$ ).

Met behulp van de formules (7.6) en (7.7) kunnen dus schattingen in de vorm van (7.1) gemaakt worden van de kansen op een waterstand  $\geq h$  per jaar. Daar het uiteindelijk natuurlijk de bedoeling is deze kansen ook te schatten voor waarden van  $h$  die nog nooit zijn waargenomen (dus formule (7.1) te extrapoleren), moeten wij met het aanpassen echter zeer voorzichtig zijn.

#### Extrapolatie en homogeen maken van het waarnemingsmateriaal

Het behoeft geen betoog, dat extrapolatie van een zuiver empirisch verkregen lijn steeds in hoge mate onzeker is. Wil men echter bij de bepaling van de aan te brengen dijkverhogingen rekening houden met de kansen op hogere waterstanden dan de tot dusverre waargenomen standen, dan zal men niettegenstaande alle onzekerheden toch uit de waarnemingen een kansverdeling moeten afleiden, die zich ook verder uitstrekt dan de hoogst waargenomen stand. Dit betekent eigenlijk dat men zich voorstelt, dat over lange tijd, bijv. na enkele honderden jaren, met de dan beschikbare waarnemingen opnieuw een empirische frequentielijn zal worden afgeleid, en dat men nu reeds tracht te raden hoe deze er zal uitzien.

Om de onzekerheden bij de extrapolatie zoveel mogelijk te beperken, dient men ervoor te zorgen, dat de extrapolatie niet gebaseerd wordt op "niet-homogeen" waarnemingsmateriaal. Nu kan men met de methode van GUMBEL laten zien dat het materiaal bestaande uit alle waarnemingen, niet homogeen is, hetgeen verklaard wordt door het feit dat het aantal zeer hoge hoogwaterstanden in de winter veel groter is dan in de zomer. Eén en ander wordt verderop nog nader toegelicht.

Men zou, om een grotere homogeniteit te bereiken, alleen de

hoogwaterstanden gedurende de wintermaanden november t/m januari (dit zijn de maanden waarin de meeste hoge hoogwaterstanden voorkomen), kunnen beschouwen. Ook deze waargenomen hoogwaterstanden zijn echter nog verre van homogeen, doordat zij veroorzaakt worden door depressies van verschillende typen. Beter is het daarom die hoogwaterstanden te selecteren, die het gevolg zijn van potentieel gevaarlijke depressies. Door dus meteorologische hulpmiddelen te gebruiken, kan een grotere homogeniteit bereikt worden, waardoor de betrouwbaarheid van de extrapolatie wordt vergroot.

Pogingen om het materiaal zo mogelijk nog beter homogeen te maken, werden langs twee andere wegen verricht, nl. door te onderzoeken of er een verband te vinden was tussen de hoogwaterstanden en de zonnevlekken-intensiteit en of aan te tonen viel, dat de jaren verdeeld konden worden in "gevaarlijke" en "minder gevaarlijke" jaren. Beide onderzoeken hadden een negatief resultaat: er waren in het ter beschikking staande materiaal geen aanwijzingen voor een merkbare invloed van de zonnevlekken-intensiteit op de hoogwaterstanden en een splitsing, zoals die van de maanden en die van de depressies, in gevaarlijke en minder gevaarlijke, kan bij de jaren niet worden verkregen. Een meteorologische basis ontbrak trouwens bij deze beide onderzoeken.

Behalve dat het waarnemingsmateriaal homogeen gemaakt moet worden, dienen wij er ook voor te zorgen dat de waarnemingen onderling onafhankelijk zijn, aangezien de formules van de schatters op deze onderstelling zijn gebaseerd. Nu kunnen er gedurende één depressie verschillende zeer hoge hoogwaterstanden optreden en deze bezitten uiteraard een grote afhankelijkheid. Daarom is per depressie slechts de hoogste hoogwaterstand in het onderzoek betrokken.

Er is derhalve uiteindelijk gewerkt met de hoogste hoogwaterstand per depressie, waarbij alleen die depressies beschouwd werden die optraden in de wintermaanden november, december en januari, en een baan volgden welke voldeed aan een bepaald meteorologisch criterium. In figuur 7.3 zijn deze op analoge wijze uitgezet als in figuur 7.1

voor alle waterstanden is gebeurd <sup>\*)</sup>. Een duidelijk inzicht in de verschillen die ontstaan wanneer men de exponentiële verdeling aan alle, dan wel aan de nu gekozen waarnemingen aanpast, verkrijgt men door de figuren 7.4 en 7.5 te vergelijken (zie blz. 111 en 113).

#### Toetsing van de aanpassing

Nu wij het materiaal zo goed mogelijk homogeen hebben gemaakt, zullen wij onderzoeken of de geselecteerde waarnemingen inderdaad als onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling beschouwd kunnen worden. Achteraf vindt dan nog een controle plaats op de homogeniteit van het materiaal. De onafhankelijkheid van de waarnemingen werd tot nu toe ondersteld bij de afleiding van de formules (7.6) en (7.7), de exponentiële verdeling bij het opstellen van formule (7.1). Wij beginnen met het onderzoek van de laatste veronderstelling.

Een gangbare toets voor het beoordelen van de aanpassing van een theoretische verdeling aan een steekproefverdeling is de  $\chi^2$ -toets. Deze toets werd behandeld in paragraaf 10 van deel 3; in hetzelfde deeltje (§13) werd reeds nagegaan hoe de toetsing verliep voor geselecteerde waarnemingen bij beginpunt  $h^* = 1,70$  m en  $\hat{n}(h^*) = 166$ . In tabel 7.1 zijn zowel voor alle waarnemingen als voor geselecteerde waarnemingen en voor verschillende beginpunten  $h^*$  de schattingen  $\hat{n}(h^*)$  en  $\hat{a}$  opgegeven. Aangepaste verdelingen, welke bij toepassing van de  $\chi^2$ -toets met een onbetrouwbaarheid van 5% verworpen moesten worden, zijn aangegeven door de schatting van  $a$  te onderstrepen. Gebroken onderstreept zijn die gevallen, waarbij de aanpassing zéér slecht is. Uit de gevonden waarden blijkt, dat de aanpassing zéér slecht is voor lage beginpeilen, hetgeen te verwachten was, daar in deze gevallen de punten in de figuren duidelijk niet op een rechte lijn liggen.

Daarentegen kunnen de frequentieverdelingen van de waarnemingen  $\geq 1,50$  m, althans volgens de  $\chi^2$ -toets, wel voorgesteld worden door

<sup>\*)</sup> In figuur 7.1 zijn de punten  $(h, n(h))$  uitgezet, terwijl in figuur 7.3 de methode van BENARD en BOS-LEVENBACH (zie paragraaf 1, deel 3) werd gebruikt; de verschillen zijn alleen merkbaar bij de geheel rechts gelegen punten.

Tabel 7.1

De bij de  $\chi^2$ -aanpassingstoets  
aangepaste exponentiële verdelingen

|          | $h^*$ (in m) | $\hat{n}(h^*)$ | $\hat{a}$ |
|----------|--------------|----------------|-----------|
| fig. 7.1 | 1,10         | 126            | 1,212     |
| fig. 7.4 | 1,30         | 47,2           | 0,231     |
|          | 1,50         | 19,7           | 0,236     |
|          | 1,70         | 8,41           | 0,243     |
|          | 1,90         | 3,62           | 0,255     |
|          | 2,10         | 1,65           | 0,255     |
| fig. 7.3 | 1,30         | 4,97           | 0,500     |
| fig. 7.5 | 1,40         | 4,65           | 0,430     |
|          | 1,50         | 4,08           | 0,383     |
|          | 1,60         | 3,37           | 0,354     |
|          | 1,70         | 2,64           | 0,337     |
|          | 1,80         | 2,05           | 0,321     |
|          | 1,90         | 1,49           | 0,325     |
|          | 2,00         | 1,13           | 0,315     |
|          | 2,10         | 0,841          | 0,304     |
|          | 2,20         | 0,524          | 0,364     |
|          | 2,30         | 0,381          | 0,387     |
|          | 2,40         | 0,286          | 0,394     |
|          | 2,50         | 0,270          | 0,315     |
|          | 2,60         | 0,206          | 0,304     |

exponentiële verdelingen en wij kunnen dus zeggen dat de waargenomen frequenties over het algemeen niet te veel afwijken van wat op grond van de exponentiële verdeling te verwachten is. Dit geldt zowel voor de niet geselecteerde als voor de geselecteerde waarnemingen. Uiteindelijk is als beginpunt  $h^*$  gekozen 1,70 m. Een lagere waarde is niet wenselijk omdat uit figuur 7.5 blijkt dat de punten onder 1,70 m duidelijk gaan afwijken van de aangepaste lijn. Een hogere waarde heeft tot nadeel dat de analyse op minder waarnemingen wordt gebaseerd. De keuze blijft echter min of meer arbitrair.

Nu is het niet uitgesloten dat voor grote  $h$  uitsluitend afwijkingen naar boven optreden en voor kleine  $h$  afwijkingen naar beneden of juist andersom. De extrapolatie zou dan van twijfelachtige waarde worden.



Of de afname van een exponentiële verdeling aanleiding is tot onwaarschijnlijke afwijkingen van de hoge waarnemingen ten opzichte van alle waarnemingen, kan worden onderzocht met de volgende toets.

Als  $h_1, \dots, h_n$  de naar grootte gerangschikte, onderling onafhankelijke waarnemingen zijn uit de exponentiële verdeling

$$(7.8) \quad F_{h^*}(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{h-h^*}{a}} & \text{voor } h \geq h^* \\ 0 & \text{voor } h < h^* \end{cases}$$

met  $h^* = h_{n+1} \leq h_n \leq h_{n-1} \leq \dots \leq h_1$ , dan vormen  $v_1, \dots, v_n$ , waarbij  $v_i = i(h_i - h_{i+1})$ , eveneens een steekproef van onderling onafhankelijke waarnemingen uit  $F_{h^*}(h)$ . Men kan nu, bij gegeven  $k$ , toetsen of het quotiënt

$$(7.9) \quad b = \frac{v_1 + \dots + v_k}{v_1 + \dots + v_{k+1} + \dots + v_n} = \frac{h_1 + \dots + h_k - kh_{k+1}}{h_1 + \dots + h_n - nh^*}$$

ongewoon groot of klein is, d.w.z. of de som van de verschillen van de hoogste  $k$  waarnemingen met  $h_{k+1}$  te sterk afwijkt van de som van de verschillen van alle waarnemingen met  $h^*$ .

Men kan bewijzen dat de toetsingsgrootheid

$$(7.10) \quad \underline{b} = \frac{v_1 + \dots + v_k}{v_1 + \dots + v_n}$$

een bèta-verdeling heeft met parameters  $\alpha = k$  en  $\beta = n-k$  (vgl. (7.28), deel 2). Dus

$$(7.11) \quad \begin{aligned} P[\underline{b} \leq b] &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^b v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} dv = \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \int_0^b v^{k-1} (1-v)^{n-k-1} dv. \end{aligned}$$

Toepassing van deze toets op de waarnemingen  $\geq 1,70$  m voor verschillende waarden van  $k$  brengt geen bijzondere kenmerken van de hogere hoogwaterstanden t.o.v. alle hoogwaterstanden aan het licht, zoals

uit tabel 7.2 blijkt.

Tabel 7.2

Toetsresultaten

|         |    |        |                           |
|---------|----|--------|---------------------------|
| n = 166 | k  | b      | $P[\underline{b} \leq b]$ |
|         | 4  | 0,0231 | 0,53                      |
|         | 8  | 0,0542 | 0,68                      |
|         | 16 | 0,0942 | 0,49                      |
|         | 32 | 0,2117 | 0,75                      |

Het lijkt derhalve gerechtvaardigd aan te nemen, dat alle hier beschouwde hoogwaterstanden uit dezelfde exponentiële verdeling afkomstig zijn.

Tenslotte gaan wij na of het waarnemingsmateriaal inderdaad geacht kan worden homogeen te zijn en de waarnemingen onderling onafhankelijk. Dit kan met de methode van E.J. GUMBEL, welke methode berust op de eigenschap dat de grootste van  $N$  onderling onafhankelijke waarnemingen van een stochastische grootte onder bepaalde voorwaarden bij benadering een dubbel-exponentiële verdeling heeft.

Geven wij het maximum van de waargenomen hoogwaterstanden gedurende één jaar aan met  $\underline{h}$ , dan is de verdelingsfunctie van  $\underline{h}$  dus

$$(7.12) \quad H(h) = e^{-e^{-\beta(h-j)}}.$$

Op een bepaald soort waarschijnlijkheidspapier (vgl. paragraaf 1, deel 3), het zg. Gumbelpapier, wordt deze verdelingsfunctie getransformeerd tot een rechte lijn. We kunnen dus onderzoeken of de jaar-maxima van de waargenomen hoogwaterstanden beschouwd kunnen worden als onderling onafhankelijke trekkingen uit een dubbel-exponentiële verdeling, door na te gaan of deze maxima op Gumbelpapier (cumulatief) uitgezet inderdaad op een rechte lijn liggen. Bovendien kan men aantonen dat de helling  $\beta$  van deze lijn moet overeenstemmen met de

helling  $\frac{1}{a}$ , wanneer men  $\log n(h)$  uitzet tegen  $h$ .

In de figuren 7.6 en 7.7 zijn de jaarmaxima uitgezet op Gumbel-papier, uitgaande van resp. alle waarnemingen en alleen baanselectie-waarnemingen. De getrokken lijnen geven de verdelingsfuncties (bepaald door  $\frac{1}{a}$ ) aan van alle waarnemingen, resp. alle geselecteerde waarnemingen. Wij zien dat de punten in beide figuren redelijk aansluiten bij een rechte lijn, hetgeen suggereert dat zowel de geselecteerde als de niet geselecteerde waarnemingen onderling onafhankelijk zijn.

Duidelijk blijkt echter dat de helling van de getekende lijn in figuur 7.6 slecht en in figuur 7.7 goed bij de uitgezette waarnemingen past. Dit verschijnsel is gemakkelijk te verklaren daar de jaarmaxima vrijwel steeds in de winter vallen. De lagere hoogwaterstanden in de zomer hebben daardoor geen invloed op de verdeling van de jaarmaxima, terwijl zij wel invloed hebben op de helling van de lijn in figuur 7.4. De helling van de in figuur 7.4 aangepaste lijn is erdoor vergroot, hetgeen tot gevolg heeft, dat bij extrapolatie de overschrijdingskansen van hoge peilen  $h$  worden onderschat. De gelijke hellingen in figuur 7.7 wijzen er daarentegen op, dat de geselecteerde waarnemingen wel homogeen materiaal vormen.

De keuze van de drie maanden januari, februari en december is uiteraard enigszins arbitrair, maar verkleining of vergroting (op beperkte schaal) van deze periode, waarin bovendien de meeste jaarmaxima vallen, beïnvloedt de resultaten nauwelijks.

#### Enige andere uitgevoerde bewerkingen

Enige andere uitgevoerde bewerkingen willen we hier nog in het kort noemen.

1) Er is getracht de verdelingsfunctie van de hoogwaterstanden te benaderen met een log. normale verdeling. Deze bleek inderdaad goed bij de waarnemingen aangepast te kunnen worden; de verkregen verdeling is echter nauwelijks te onderscheiden van de hier gebruikte exponentiële verdeling, ook niet bij extrapolatie tot bijv. 6 m hoogte. De exponentiële verdeling geeft dus resultaten, die in het door de waarnemingen bestreken interval ook bij benadering in overeenstemming zijn

met de veronderstelling van een log. normale verdeling. De eerstgenoemde verdeling is echter wiskundig veel beter hanteerbaar en bovendien bevredigender, omdat zij van slechts één aan de waarnemingen aan te passen parameter afhangt, hetgeen tot minder willekeur bij de aanpassing en de extrapolatie aanleiding geeft. Daarom werd aan de exponentiële verdeling de voorkeur gegeven.

## 2) Betrouwbaarheidsintervallen.

Uit tabel 7.1 blijkt dat wij voor de helling van de lijn verschillende waarden vinden, wanneer wij uitgaan van verschillende beginpunten. Een beter inzicht in de betrouwbaarheid van de schatting van  $a$  verkrijgt men door het berekenen van betrouwbaarheidsgrenzen voor  $a$ . Wij gaan uit van de baanselectiewaarnemingen en onderstellen dat dit onderling onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling zijn. Boven de 1,70 m zijn er 166 waarnemingen. De meest aannemelijke schatting van  $a$  is dan volgens tabel 7.1:  $\hat{a} = 0,337$ . Een kleine afwijking van de geschatte waarde van  $n(h^*)$  ten opzichte van de werkelijke waarde is niet ernstig, daar deze neerkomt op een geringe verschuiving van de baanselectielijn evenwijdig aan zichzelf en dit is voor de extrapolatie van weinig betekenis. Wat de helling van de lijn betreft, zijn wij hoofdzakelijk geïnteresseerd in bovengrenzen van  $a$ . Met behulp van de in deel 3 aangegeven theorie van de betrouwbaarheidsintervallen, is het mogelijk betrouwbaarheidsbovengrenzen voor  $a$  te vinden. Bij onbetrouwbaarheden van 5% resp. 1% zijn deze bovengrenzen 0,385 resp. 0,407.

## 3) Bodemdaling.

In het begin van het onderzoek werd nagegaan of op de 49 000 bekende hoogwaterstanden in het verleden wellicht bodemdalingscorrecties moesten worden toegepast. Hiervan werd echter afgezien, omdat ten eerste deze correctie zeer onzeker zou zijn en ten tweede zijn invloed op de - voor dit onderzoek belangrijkste - hoge hoogwaterstanden relatief zeer gering is. Dit geldt uiteraard niet meer indien men, bij extrapolatie, rekening wenst te houden met de bodemdaling in toekomstige perioden. In de economische beschouwingen wordt de bodemdaling dan ook in rekening gebracht.

#### 4) Hoogwaterstanden of opzetten?

Bij de statistische verwerking moest beslist worden of de hoogwaterstanden zelf beschouwd zouden worden, dan wel de daarbij behorende opzetten <sup>\*)</sup>. Beschouwt men de opzetten, dan wordt de invloed van het astronomisch getij - althans ten dele - bij de statistische analyse geëlimineerd, hetgeen wellicht tot nauwkeuriger uitkomsten zou kunnen leiden. Nu blijkt echter, indien men de opzetten op dezelfde wijze uitzet als in figuur 7.1 met de hoogwaterstanden is gedaan, dat een lijn wordt verkregen die evenwijdig aan die van de hoogwaterstanden verloopt. Analyse van deze lijn zou dus tot dezelfde (of nagenoeg dezelfde) resultaten leiden als van de lijn der hoogwaterstanden. Het eerstgenoemde houdt meer werk in dan het laatstgenoemde en heeft minder rechtstreeks betrekking op de praktische consequenties van het vraagstuk. Om die reden is het verantwoord niet met de opzetten, maar met de hoogwaterstanden te werken. Beter dan de hoogwaterstanden of opzetten zou wellicht het grootste verschil tussen de werkelijke waterhoogte en de voor hetzelfde moment voorspelde waterhoogte, die uit de getijkromme volgt, gebruikt kunnen worden. Deze grootte is echter slechts voor enkele stormen bekend, doch niet voor een voldoende aantal perioden van hoogwater om daarop een statistische analyse te kunnen toepassen.

Alle bovenstaande beschouwingen samenvattend komen wij tot de conclusie: De baanselectiewaarnemingen  $\geq 1,70$  m kunnen beschouwd worden als onderling onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling met  $a = 0,337$ . De overschrijdingskans van de op 1 februari 1953 opgetreden hoogte is 0,0045 en die van het 5,00 m peil is 0,00015. Een overschrijdingskans van 0,0001 treedt op bij 5,10 m.

---

<sup>\*)</sup> De opzet is het verschil tussen de waargenomen en de voorspelde hoogwaterstand, die dus niet op hetzelfde moment behoeven te vallen.

## 7.2. De optimale hoogte van onze dijken

### De overwegingen van de Deltacommissie

Euwenlang is het in Nederland gebruik geweest de dijken te verhogen tot het peil van de hoogste ter plaatse bekende stormvloedstand. Sinds de in 1939 door P.J. WEMELSFELDER geïntroduceerde statistische beschouwingwijze van de hoogwaterstanden, is men zich gaan realiseren dat ook met hogere dan reeds voorgekomen standen rekening moet worden gehouden.

Op 1 februari 1953 was de stand te Hoek van Holland 3,85 m met een overschrijdingskans van 0,0045 per jaar. Het optreden van nog hogere standen is echter fysisch gezien zeer zeker mogelijk omdat 1) het astronomisch getij (voorspelde stand volgens de getijtafel) bijna een halve meter hoger had kunnen zijn en 2) bij maximale intensiteit van de storm op een andere plaats de vloed nog enige dm hoger zou zijn. Vloedstanden van 5 m N.A.P. kunnen dus zeker optreden, terwijl zelfs nog hogere standen niet geheel uitgesloten zijn.

Op grond van deze overwegingen en rekening houdende met de bijbehorende frequenties is de Deltacommissie tot de conclusie gekomen dat de kans op overstroming tot een aanvaardbare waarde wordt teruggebracht, wanneer men deze op  $10^{-4}$  per jaar, of wel 1% per eeuw brengt. Dit betekent volgens het eindverslag van de Deltacommissie, dat de dijken in Hoek van Holland op een zodanig niveau gebracht moeten worden dat stormvloedstanden van 5 m (volgens paragraaf 7.1: 5,10 m) geen doorbraak veroorzaken. Ook op economische gronden was een "basispeil" van 5 m te Hoek van Holland acceptabel. Uitzonderlijk veilig is dit nog niet, aangezien het betekent dat de kans op een ramp gedurende de eerstkomende 50 jaar, dus tijdens het leven van de thans jonge mensen, altijd nog 0,5% is. In andere gevallen houdt men rekening met kansen op risico's die nog veel kleiner zijn.

Het basispeil is dus vastgesteld op een mengsel van fysische en economische overwegingen. Ondanks de aanzienlijke verbetering ten opzichte van vroegere overwegingen, heeft ook deze methode nog iets onbevredigends en men zou gaarne tot een beter gefundeerde conclusie

willen komen. De vraag is of deze wellicht door het afwegen van economische voor- en nadelen verkregen kan worden. Immers noch zeer hoge, noch zeer lage dijken zijn economisch verantwoord, zodat er ergens een optimum moet zijn. Een tweede is uiteraard of dit optimum ook te achterhalen is.

Tegen deze achtergrond heeft het Mathematisch Centrum de opdracht geaccepteerd: een statistisch en economisch verantwoorde basis te verstrekken voor de bepaling van de verhoging welke de dijken langs de Westerschelde en de Rotterdamse Waterweg moeten ondergaan.

#### Het eenvoudige geval

Wij beschouwen voorlopig alleen een sterk vereenvoudigd geval en nemen daarbij aan dat het gaat om één afzonderlijke polder, waarbij een stormvloedstand boven het kritieke peil  $h_0$  (welk peil niet gelijk hoeft te zijn aan de kruinhoogte) een overstroming veroorzaakt, die alle laag gelegen goederen in de polder verloren doet gaan en waarbij stormvloedstanden onder het kritieke peil geen enkele schade veroorzaken.

De vraag is nu of het huidige kritieke peil, economisch gezien, bevredigend is en zo neen, met hoeveel het dient te worden verhoogd.

Stel dat wij het kritieke peil met  $x$  meter verhogen. In veel gevallen blijken de dijkverhogingskosten  $i$  in goede benadering lineaire functies van  $x$  te zijn, zodat wij krijgen

$$(7.13) \quad i = i_0 + i_1 x,$$

waarin  $i_0$  de initiële kosten zijn en  $i_1$  de kosten per meter dijkverhoging.

Deze dijkverhogingskosten moeten worden afgewogen tegen de verminderde kansen op rampschaden. Dit is slechts mogelijk wanneer er één bepaalde maatstaf beschikbaar is, of anders gezegd, wanneer wij weten voor welk bedrag de overblijvende kansen op rampschaden in rekening moeten worden gebracht. Wij verrichten hiertoe het volgende gedachtenexperiment.

Stel dat een verzekeringsmaatschappij in staat en bereid zou zijn om de overblijvende mogelijke rampschaden te verzekeren. De maatschappij zal ieder jaar een premie vragen, die gelijk is aan de rampschadeverwachting per jaar; deze is na de verhoging met  $x$  meter

$$(7.14) \quad p(h_0+x) \cdot w ,$$

waarin  $p(h_0+x)$  de kans is op overschrijding van het peil  $h_0+x$  per jaar en  $w$  de totale door de dijk te beschermen waarde vertegenwoordigt (inclusief kosten van dijkherstel, indirecte schade ten gevolge van produktiederving elders, waardevermindering van de grond, etc.). Teneinde deze te betalen premies te kunnen vergelijken met  $i$ , bepalen wij de contante waarde van al deze premies. De contante waarde van een over  $t$  jaar te betalen premie bedraagt

$$\frac{p(h_0+x) \cdot w}{\left(1 + \frac{\delta}{100}\right)^t} ,$$

waarin  $\delta$  de rentevoet per jaar is, of met een continue rentevoet

$$(7.15) \quad p(h_0+x) w e^{-\frac{\delta t}{100}} .$$

Kort men de huidige overschrijdingskans af tot  $p_0$  en schrijft men

$$(7.16) \quad \lambda = \frac{1}{a} ,$$

dan gaat (7.15) over in (vgl. (7.1))

$$(7.17) \quad p(h_0+x) w e^{-\frac{\delta t}{100}} = n(h^*) e^{-\lambda(h_0-h^*+x)} w e^{-\frac{\delta t}{100}} = p_0 w e^{-\lambda x} e^{-\frac{\delta t}{100}} .$$

De totale verdisconteerde waarde van alle te betalen schaden is dan

$$(7.18) \quad r = \int_0^\infty p_0 w e^{-\lambda x} e^{-\frac{\delta t}{100}} dt = p_0 w e^{-\lambda x} \frac{100}{\delta} = \frac{p_0^* w e^{-\lambda x}}{\delta} ,$$

met  $100p_0 = p_0^*$ .



Dus bij een verhoging van de dijken met  $x$  meter worden de totale kosten om de polder te verdedigen tegen de zee

$$(7.19) \quad k = i + r = i_0 + i_1 x + \frac{p_0^* w e^{-\lambda x}}{\delta}.$$

Achten wij die dijkverhoging optimaal, waarbij  $k$  minimaal is, dan wordt het optimum gevonden door

$$(7.20) \quad \frac{dk}{dx} = i_1 - \frac{p_0^* w \lambda e^{-\lambda x}}{\delta}$$

gelijk aan nul te stellen. Dus als  $\hat{x}$  de optimale verhoging is, geldt

$$(7.21) \quad i_1 - \frac{p_0^* w \lambda e^{-\lambda \hat{x}}}{\delta} = 0$$

of

$$(7.22) \quad \hat{x} = \frac{1}{\lambda} \log \frac{p_0^* w \lambda}{\delta i_1}.$$

Figuur 7.8 geeft de belangrijkste functies nog eens grafisch weer.

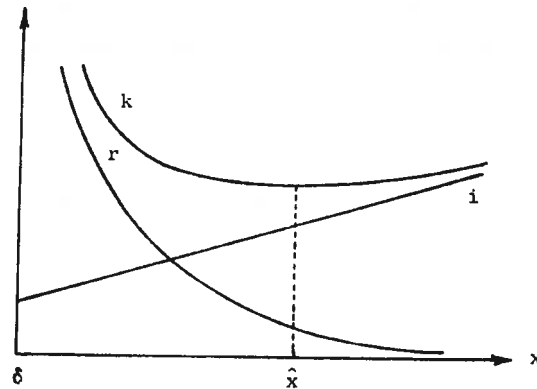


fig. 7.8

Grafische bepaling van de optimale dijkverhoging

Ook andere optimale grootheden zijn nu eenvoudig te berekenen. We vinden

$$(7.23) \quad \hat{i} = i_0 + i_1 \hat{x} ,$$

$$(7.24) \quad \hat{r} = \frac{i_1}{\lambda} ,$$

$$(7.25) \quad \hat{k} = i_0 + i_1 \hat{x} + \frac{i_1}{\lambda} .$$

Dijkverhoging zal slechts plaatsvinden als de kosten bij optimale verhoging kleiner zijn dan de kosten bij geen verhoging, dus als

$$(7.26) \quad i_0 + i_1 \hat{x} + \frac{i_1}{\lambda} < k_0 = r_0 = \frac{p_0^* w}{\delta} ;$$

d.w.z. als geldt (vgl. (7.21))

$$\hat{i} + \frac{i_1}{\lambda} < \frac{i_1}{\lambda} e^{\lambda \hat{x}}$$

of

$$(7.27) \quad \hat{i} < \frac{i_1}{\lambda} (e^{\lambda \hat{x}} - 1) .$$

Hoewel de formules (7.22) en (7.27) alleen geldig zijn voor het hier behandelde, niet geheel reële (want te zeer vereenvoudigde) geval, bevatten ze toch al de essentie van de oplossing.

#### Kritiek op het eenvoudige model

Op de onderstellingen die aan het eenvoudige model ten grondslag liggen, kan op velerlei wijzen kritiek worden geleverd. Een aantal punten worden hieronder genoemd.

- 1) Teneinde het optimum te kunnen berekenen, zijn twee niet geheel gelijkwaardige grootheden opgeteld; nl. enerzijds de werkelijk uit te geven kosten van dijkverhoging en anderzijds de contante waarden van toekomstige schadeverwachtingen. In de praktijk van de verzekeringsmaatschappijen is een dergelijke procedure gebruikelijk en kan de

methode verdedigd worden met statistische argumenten. Als de regering deze handelwijze toepaste op alle beslissingen en er voldoende projecten van vergelijkbare omvang zijn, dan was ook hier de methode zonder meer te rechtvaardigen. De fictieve verzekeringsmaatschappij is echter alleen ingevoerd als "model" teneinde de redenering aanschouwelijk te maken. Het model kan aanzienlijk gewijzigd worden zonder dat de resultaten erdoor veranderen.

2) De onderstelling, dat een bepaald kritiek peil  $h_0$  bestaat zodanig dat bij vloedhoogte  $h > h_0$  alles verloren gaat en bij een vloedhoogte  $h < h_0$  niets, is wellicht voor één polder nog wel acceptabel, maar voor een groot polderstelsel uiteraard niet. In het laatste geval moet men een functie invoeren die aangeeft welke fractie van  $w$  verloren gaat bij bepaalde waarden van  $h$ .

3) De schadeverwachting is voor ieder jaar gelijkgesteld aan  $p(h_0+x) \cdot w$ . Dit impliceert de onderstelling dat na een ramp binnen een jaar alles weer in de oude staat is teruggebracht. Dit zal wel niet steeds het geval kunnen zijn, maar gezien de zeer kleine kans op het optreden van twee rampen veroorzakende stormen in opeenvolgende jaren en gezien de toegepaste verdiscontering, kan de invloed hiervan zonder meer verwaarloosd worden.

4) De onderstelling dat de functie  $p(h)$  constant is in de tijd is niet houdbaar vanwege de relatieve bodemdaling van ons land ten opzichte van de zee. Deze relatieve bodemdaling ontstaat tengevolge van zeespiegelrijzing, bodemdaling en inklinking van de jongere geologische lagen. Stel dat deze relatieve bodemdaling gemiddeld  $\eta$  meter per eeuw bedraagt. Na  $\tau$  eeuwen is de dijkhoogte  $h_0+x$  verminderd tot  $h_0+x-\eta\tau$  met een overschrijdingskans

$$(7.28) \quad p(h_0+x-\eta\tau) = p_0 e^{-\lambda(x-\eta\tau)} = p_0 e^{-\lambda x + \lambda\eta\tau}.$$

Deze formule kan niet "eeuwig" goed zijn, daar  $p$  dan willekeurig zou toenemen. Om het volledig wegzinken van de dijken in zee te voorkomen, zal echter periodieke regeneratie nodig zijn, waarvan de invloed op ons probleem hierna zal worden besproken.

5) Ook de onderstelling dat de te beschermen waarde  $w$  in de loop van de tijd constant blijft is niet houdbaar, aangezien er door de eeuwen heen een, zij het zeer onregelmatige, toeneming van de welvaart heeft plaatsgevonden. Wij zullen aannemen dat  $w$  gemiddeld met  $\gamma\%$  per jaar toeneemt. Zowel  $\gamma$  als  $\delta$  zijn heel moeilijk te schatten. Gelukkig blijkt echter dat in de formules alleen de grootte  $\delta' = \delta - \gamma$  van belang is en deze "gereduceerde rentevoet" vertoont in de loop der eeuwen minder fluctuaties.

#### Het gecorrigeerde model

Wanneer de dijken steeds na  $t_0$  eeuwen op de na de verhoging verkregen hoogte worden teruggebracht (dus met  $\eta t_0$  meter worden verhoogd), dan is de contante waarde van alle kosten van dijkverhoging en regeneratie gelijk aan

$$(7.29) \quad i = i'_0 + i_1 x + i_1 \eta t_0 e^{-\delta' t_0} + i_1 \eta t_0 e^{-2\delta' t_0} + \dots = i'_0 + i_1 x + \frac{i_1 \eta t_0}{e^{\delta' t_0} - 1}$$

$i'_0$  bestaat hierin uit  $i_0$  en de contante waarde van alle toekomstige initiële kosten. Er is verdisconteerd met de gereduceerde rentevoet omdat bij toenemende welvaart ook de kosten van dijkbouw vermoedelijk hoger zullen worden. Verdiscontering met  $\delta$  leidt overigens tot resultaten die vrijwel niet afwijken van die bij verdiscontering met  $\delta'$ .

Over  $t$  jaren of  $100\tau$  eeuwen, is  $w$  toegenomen tot  $w e^{\gamma\tau}$ . Met behulp van (7.28) vinden wij voor de contante waarde van de totale schadeverwachting gedurende de eerste  $t_0$  eeuwen

$$(7.30) \quad \begin{aligned} 100 \int_0^{t_0} p_0 w e^{\gamma\tau} e^{-\delta\tau} e^{-\lambda x + \lambda \eta \tau} d\tau &= \\ &= p_0^* w e^{-\lambda x} \int_0^{t_0} e^{-\delta'\tau + \lambda \eta \tau} d\tau = \\ &= p_0^* w e^{-\lambda x} \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)t_0}}{\delta' - \beta}, \end{aligned}$$

waarin  $\beta = \lambda \eta$  is gesteld.

Sommeren over alle perioden leidt tot

$$\begin{aligned}
 (7.31) \quad r &= p_0^* w e^{-\lambda x} \cdot \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)t_0}}{\delta' - \beta} (1 + e^{-\delta' t_0} + e^{-2\delta' t_0} + \dots) = \\
 &= p_0^* w e^{-\lambda x} \cdot \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)t_0}}{\delta' - \beta} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\delta' t_0}} = \\
 &= \frac{p_0^* w e^{-\lambda x + \frac{1}{2}\beta t_0}}{\delta'} \cdot c
 \end{aligned}$$

met

$$(7.32) \quad c = e^{-\frac{1}{2}\beta t_0} \cdot \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)t_0}}{\delta' - \beta} \cdot \frac{\delta'}{1 - e^{-\delta' t_0}} .$$

De optimale waarde van  $x$  vinden wij nu door

$$(7.33) \quad \frac{dk}{dx} = \frac{d(r+i)}{dx}$$

gelijk aan nul te stellen. Het resultaat is

$$(7.34) \quad \hat{x} = \frac{1}{\lambda} \log \frac{p_0^* w \lambda}{\delta' i_1} + \frac{1}{2} \eta t_0 + \frac{1}{\lambda} \log c ,$$

hetgeen, wegens het feit dat  $\frac{1}{\lambda} \log c$  klein en negatief is, bij benadering vervangen kan worden door

$$(7.35) \quad \hat{x} \approx \frac{1}{\lambda} \log \frac{p_0^* w \lambda}{\delta' i_1} + \frac{1}{2} \eta t_0 .$$

Vergelijken wij deze formule met (7.22), dan zien wij dat  $\delta$  vervangen is door  $\delta'$  en dat tengevolge van het rekening houden met de bodemdaling een term  $\frac{1}{2} \eta t_0$  is toegevoegd. Ook de grootheden  $\hat{i}$ ,  $\hat{r}$  en  $\hat{k}$  zijn weer te berekenen.

Past men formule (7.35) toe om de optimale hoogte van de dijken langs de Rotterdamse Waterweg te bepalen en gaat men uit van de volgende gegevens <sup>\*)</sup>:  $\lambda = 2,97$ ;  $p_0 = p(3,85) = 0,0045$ ;  $w = 24,2$  miljard gulden;  $i_1 = 40$  miljoen gulden;  $\delta' = 1,5\%$  per jaar, dan vindt men voor de eerste term ruim 2 meter, zodat de optimale hoogte ongeveer 6 meter zou bedragen. De term  $\frac{1}{2} \eta t_0$  is wegens de zeer slechte bekendheid van  $\eta$  moeilijk te bepalen, doch kan verwaarloosd worden, wanneer men besluit de dijken periodiek te regenereren en  $t_0$  klein te kiezen, bijv. 20 jaar.

#### Een aantal opmerkingen

- 1) Hoewel het bovengebruikte model reeds aanzienlijk beter bij de werkelijkheid aansluit dan het eerder toegepaste eenvoudige model, bevat het nog tal van onderstellingen, die niet steeds vervuld behoeven te zijn. De onderstellingen omtrent de lineariteit van  $\log p(h)$  en  $i$  bleken voor de Rotterdamse Waterweg aanvaardbaar, doch kunnen voor andere gevallen zonder moeite door gewijzigde onderstellingen worden vervangen.
- 2) De bruikbaarheid van de aangegeven methode hangt onder meer af van de nauwkeurigheid waarmee de vereiste constanten geschat kunnen worden. Uit formule (7.35) volgt, dat de invloed van onnauwkeurigheden in  $\lambda$  het grootst is, aangezien alle andere constanten slechts onder de logaritme voorkomen. Gelukkig is echter juist  $\lambda$ , samen met  $p_0$ , relatief goed bekend; een absolute fout in  $\lambda$  van  $\delta\lambda = \pm 0,5$  is reeds zeer onwaarschijnlijk en leidt slechts tot een afwijking van hooguit 20% in de uitkomst.

De kosten van dijkbouw kunnen nauwkeurig geschat worden, terwijl de invloed van  $\eta$  gering is wanneer men de periode  $t_0$  klein kiest. Resten nog de twee economische constanten  $\delta'$  en  $w$ . Hiervan is  $\delta'$  een zg. "economische invariant", waarvan de variatiemogelijkheden niet exces-

<sup>\*)</sup> De hier gegeven getallen moeten hoofdzakelijk als rekenvoorbeeld worden gezien. Niettemin zijn ze zo realistisch mogelijk gekozen. Een uitvoerige argumentatie van de gekozen waarden en een discussie van hun onnauwkeurigheid wordt gegeven in paragraaf 7 van de op blz. 82 aangehaalde Bijdrage II.2 van het Rapport Deltacommissie.

sief zijn; een verschil van een factor 2 is reeds uitgesloten te achten en heeft, aangezien deze achter de logaritme zou plaatsvinden, nog slechts een invloed van ongeveer 0,25 meter.

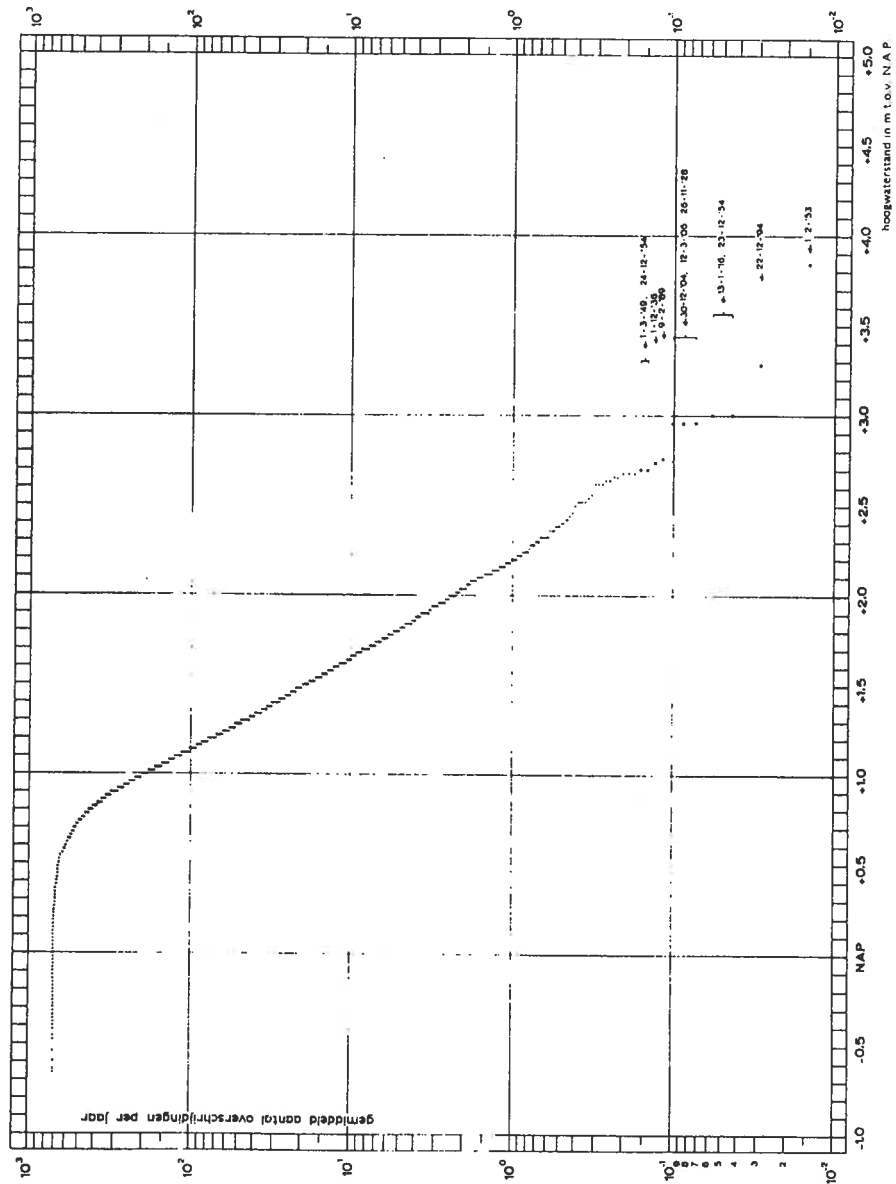
De grootheid die het moeilijkst te bepalen is, is de te beschermen waarde  $w$ . Het ligt voor de hand uit te gaan van de in het betreffende gebied aanwezige kapitaalgoederenvoorraad, vermeerderd met de aanwezige duurzame consumptiegoederen. Daarnaast moet rekening worden gehouden met de kosten van dijkherstel, bemaling, de verliezen die ontstaan door produktiederving in het betreffende gebied en elders, en moeilijk te waarderen factoren, zoals de waarden van mensenlevens, culturele goederen, e.d. Het in rekening brengen van een bepaald bedrag voor de bescherming van de aanwezige mensen is niet erg zinvol; zelfs het waarderen van een mensenleven op een vrijwel nooit toegepast hoog bedrag van bijv. f.100.000,- leidt tot verhogingen van slechts enkele centimeters. Beter is het derhalve alleen te werken met zuiver economische factoren en de aldus verkregen verhogingen te beschouwen als ondergrenzen.

3) Gezien de onnauwkeurigheden die in de gevonden waarde van  $\bar{x}$  nog aanwezig zijn, kan het resultaat van de berekening niet als het definitieve antwoord gezien worden, doch alleen als richtlijn dienen. Dit neemt niet weg dat het onderzoek ruimschoots resultaten opleverde doordat men

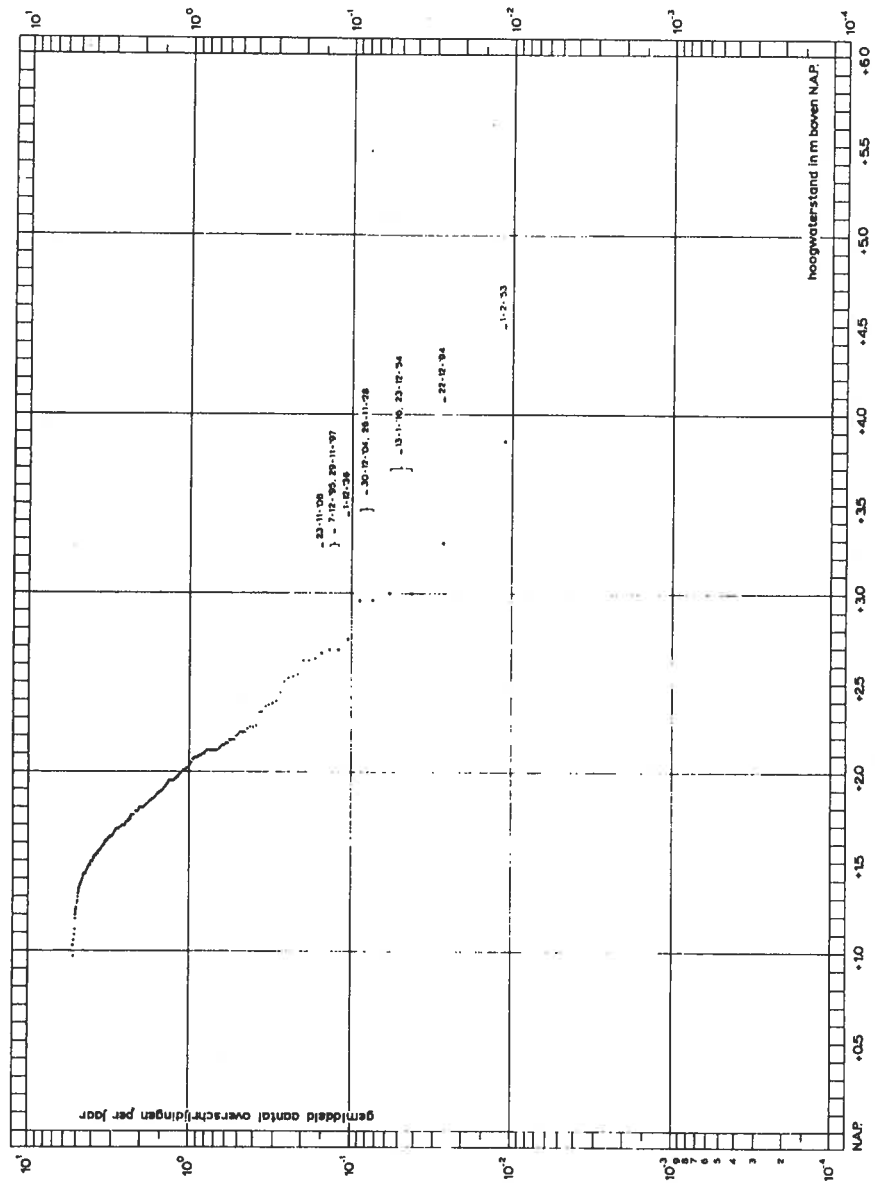
- a) een systemische methode van aanpak verkreeg, waarmee voor alle gebieden de verschillende factoren steeds op dezelfde wijze worden afgewogen;
- b) inzicht verkreeg welke factoren veel invloed hebben en welke niet;
- c) inzicht verkreeg welke relevante factoren relatief het slechtst bekend zijn;
- d) inzicht verkreeg in methoden waarop niet zuiver economische factoren in rekening gebracht kunnen worden.





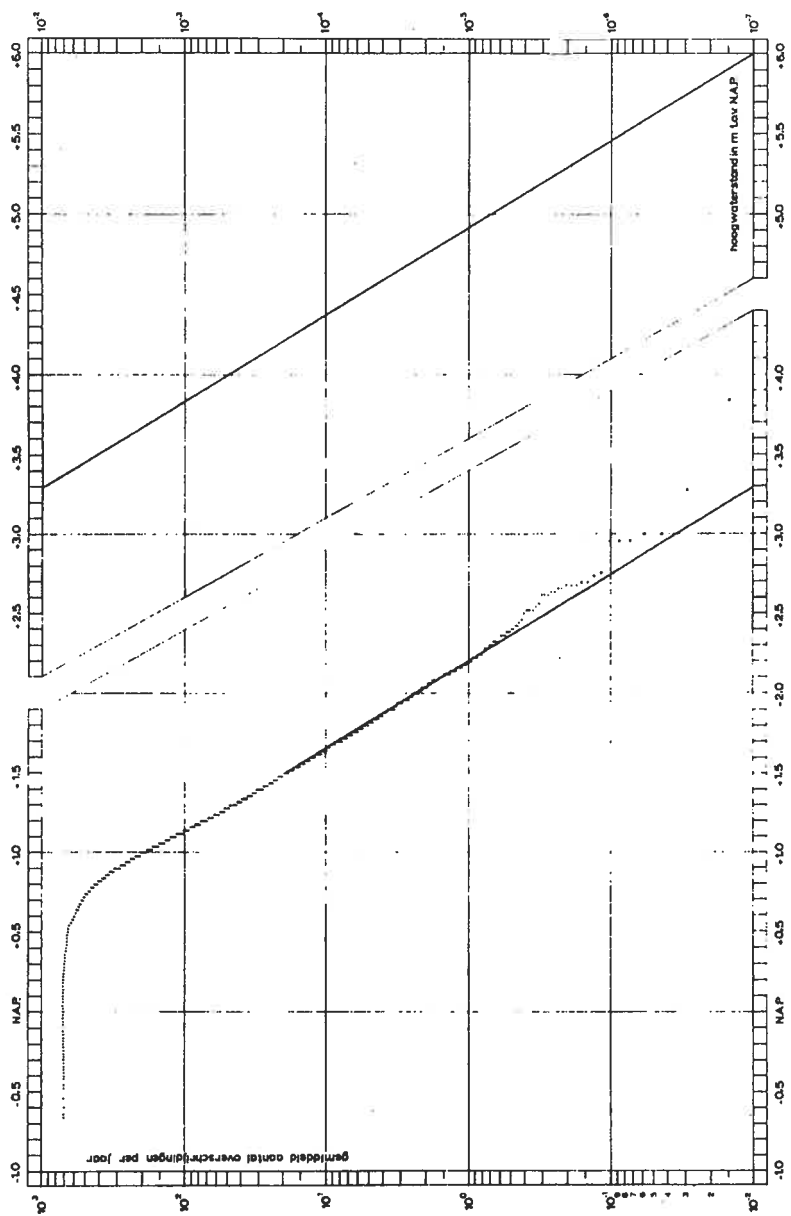






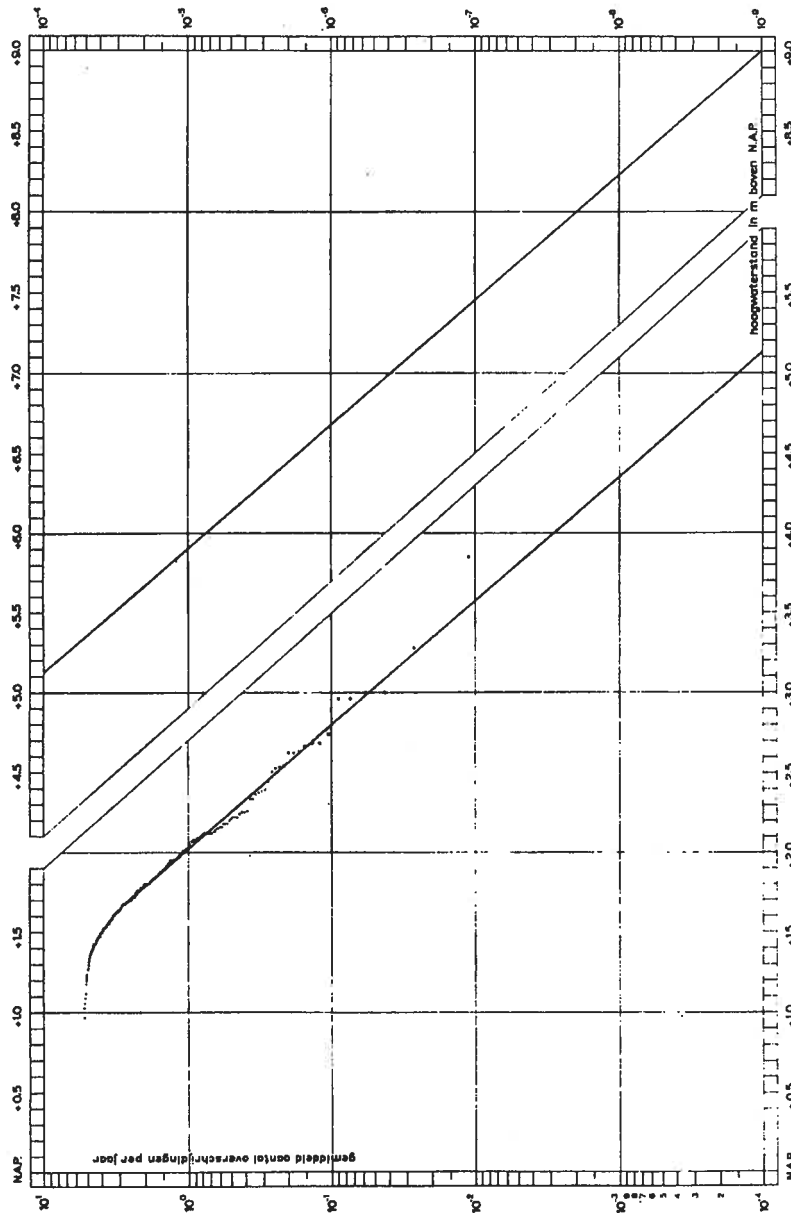
Figuur 7.3. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h, afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57





Figuur 7.4. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h, afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een bij de waarnemingen aangepaste lijn

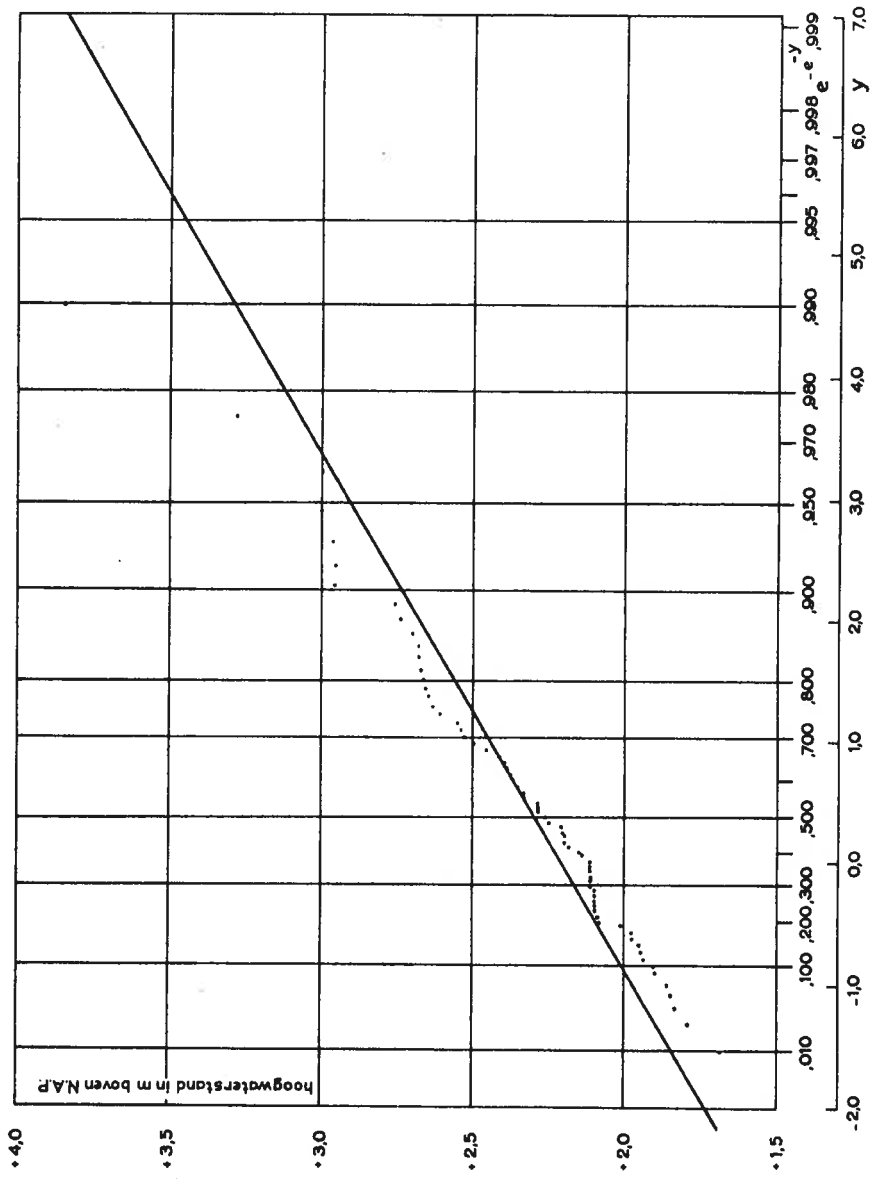




Figuur 7.5. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h, afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57, met een daaraan aangepaste rechte



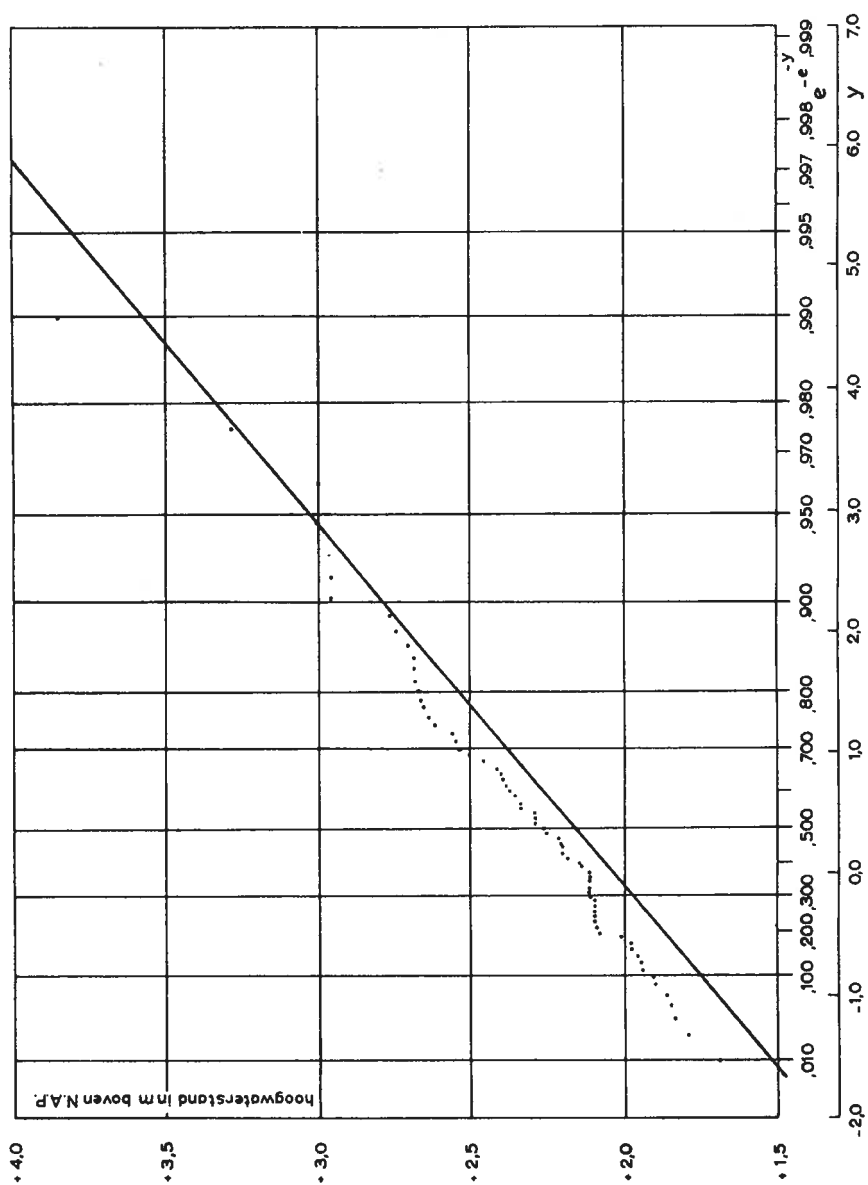




Figuur 7.6. De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van alle waarnemingen

Courtesy of E.J. GUMBEL





Figuur 7.7. De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van de baanselectiewaarnemingen

Courtesy of E.J. GUMBEL



Literatuur

- F.S. HILLIER and G.J. LIEBERMAN, Introduction to Operations Research, Holden-Day, San Francisco, 1967.
- R.L. ACKOFF and M.W. SASIENI, Fundamentals of Operations Research, John Wiley and Sons Inc., New York, 1968.
- TH.L. SAATY, Mathematical methods of Operations Research, McGraw-Hill, New York, 1959.
- CH.D. FLAGLE, W.H. HUGGINS and R.H. ROY, Operations Research and system engineering, The John Hopkins Press, Baltimore, 1960.
- H.M. WAGNER, Principles of Operations Research, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- A. KAUFMANN en R. FAURE, Operationele Research, Marka pocket, Utrecht, 1965.



## UITGAVEN IN DE SERIE MC SYLLABUS

Onderstaande uitgaven zijn verkrijgbaar bij het Mathematisch Centrum,  
2e Boerhaavestraat 49 te Amsterdam-1005, tel. 020-947272.

- 
- |          |                                                                                                                                                       |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| MCS 1.1  | F. GÖBEL & J. VAN DE LUNE, <i>Leergang Besliskunde, deel 1: Wiskundige basiskennis</i> , 1965. ISBN 90 6196 014 2.                                    |
| MCS 1.2  | J. HEMELRIJK & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 2: Kansberekening</i> , 1965. ISBN 90 6196 015 0.                                             |
| MCS 1.3  | J. HEMELRIJK & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 3: Statistiek</i> , 1966. ISBN 90 6196 016 9.                                                 |
| MCS 1.4  | G. DE LEVE & W. MOLENAAR, <i>Leergang Besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden</i> , 1966. ISBN 90 6196 017 7.                                |
| MCS 1.5  | J. KRIENS & G. DE LEVE, <i>Leergang Besliskunde, deel 5: Inleiding tot de mathematische besliskunde</i> , 1966. ISBN 90 6196 018 5.                   |
| MCS 1.6a | B. DORHOUT & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 6a: Wiskundige programmering 1</i> , 1968. ISBN 90 6196 032 0.                                  |
| MCS 1.6b | B. DORHOUT, J. KRIENS & J.TH. VAN LIESHOUT, <i>Leergang Besliskunde, deel 6b: Wiskundige programmering 2</i> , 1977. ISBN 90 6196 150 5.              |
| MCS 1.7a | G. DE LEVE, <i>Leergang Besliskunde, deel 7a: Dynamische programmering 1</i> , 1968. ISBN 90 6196 033 9.                                              |
| MCS 1.7b | G. DE LEVE & H.C. TIJMS, <i>Leergang Besliskunde, deel 7b: Dynamische programmering 2</i> , 1970. ISBN 90 6196 055 x.                                 |
| MCS 1.7c | G. DE LEVE & H.C. TIJMS, <i>Leergang Besliskunde, deel 7c: Dynamische programmering 3</i> , 1971. ISBN 90 6196 066 5.                                 |
| MCS 1.8  | J. KRIENS, F. GÖBEL & W. MOLENAAR, <i>Leergang Besliskunde, deel 8: Minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie</i> , 1968. ISBN 90 6196 034 7.        |
| MCS 2.1  | G.J.R. FÖRCH, P.J. VAN DER HOUWEN & R.P. VAN DE RIET, <i>Colloquium Stabiliteit van differentieschema's, deel 1</i> , 1967. ISBN 90 6196 023 1.       |
| MCS 2.2  | L. DEKKER, T.J. DEKKER, P.J. VAN DER HOUWEN & M.N. SPIJKER, <i>Colloquium Stabiliteit van differentieschema's, deel 2</i> , 1968. ISBN 90 6196 035 5. |
| MCS 3.1  | H.A. LAUWERIER, <i>Randwaardeproblemen, deel 1</i> , 1967. ISBN 90 6196 024 x.                                                                        |
| MCS 3.2  | H.A. LAUWERIER, <i>Randwaardeproblemen, deel 2</i> , 1968. ISBN 90 6196 036 3.                                                                        |
| MCS 3.3  | H.A. LAUWERIER, <i>Randwaardeproblemen, deel 3</i> , 1968. ISBN 90 6196 043 6.                                                                        |
| MCS 4    | H.A. LAUWERIER, <i>Representaties van groepen</i> , 1968. ISBN 90 6196 037 1.                                                                         |

- MCS 5 J.H. VAN LINT, J.J. SEIDEL & P.C. BAAYEN, *Colloquium Discrete wiskunde*, 1968.  
ISBN 90 6196 044 4.
- MCS 6 K.K. KOKSMA, *Cursus ALGOL 60*, 1969. ISBN 90 6196 045 2.
- MCS 7.1 *Colloquium Moderne rekenmachines, deel 1*, 1969. ISBN 90 6196 046 0.
- MCS 7.2 *Colloquium Moderne rekenmachines, deel 2*, 1969. ISBN 90 6196 047 9.
- MCS 8 H. BAVINCK & J. GRASMAN, *Relaxatietrillingen*, 1969.  
ISBN 90 6196 056 8.
- MCS 9.1 T.M.T. COOLEN, G.J.R. FÖRCH, E.M. DE JAGER & H.G.J. PIJLS, *Elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1970.  
ISBN 90 6196 048 7.
- MCS 9.2 W.P. VAN DEN BRINK, T.M.T. COOLEN, B. DIJKHUIS, P.P.N. DE GROEN, P.J. VAN DER HOUWEN, E.M. DE JAGER, N.M. TEMME & R.J. DE VOGELAERE, *Colloquium Elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1970.  
ISBN 90 6196 049 5.
- MCS 10 J. FABIUS & W.R. VAN ZWET, *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*, 1970. ISBN 90 6196 057 6.
- MCS 11 H. BART, M.A. KAASHOEK, H.G.J. PIJLS, W.J. DE SCHIPPER & J. DE VRIES, *Colloquium Halfalgebra's en positieve operatoren*, 1971.  
ISBN 90 6196 067 3.
- MCS 12 T.J. DEKKER, *Numerieke algebra*, 1971. ISBN 90 6196 068 1.
- MCS 13 F.E.J. KRUSEMAN ARETZ, *Programmeren voor rekenautomaten; De MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*, 1971. ISBN 90 6196 069 X.
- MCS 14 H. BAVINCK, W. GAUTSCHI & G.M. WILLEMS, *Colloquium Approximatie-theorie*, 1971. ISBN 90 6196 070 3.
- MCS 15.1 T.J. DEKKER, P.W. HEMKER & P.J. VAN DER HOUWEN, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1972. ISBN 90 6196 078 9.
- MCS 15.2 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, H.C. HEMKER, S.P.N. VAN KAMPEN & G.M. WILLEMS, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1973. ISBN 90 6196 079 7.
- MCS 15.3 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, P.W. HEMKER & M. VAN VELDHUIZEN, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*, 1975.  
ISBN 90 6196 118 1.
- MCS 16.1 L. GEURTS, *Cursus Programmeren, deel 1: De elementen van het programmeren*, 1973. ISBN 90 6196 080 0.
- MCS 16.2 L. GEURTS, *Cursus Programmeren, deel 2: De programmeertaal ALGOL 60*, 1973. ISBN 90 6196 087 8.
- MCS 17.1 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 1*, 1974. ISBN 90 6196 090 8.
- MCS 17.2 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 2*, 1974. ISBN 90 6196 091 6.
- MCS 17.3 N.M. TEMME, *Lineaire algebra, deel 3*, 1976. ISBN 90 6196 123 8.
- MCS 18 F. VAN DER BLIJ, H. FREUDENTHAL, J.J. DE IONGH, J.J. SEIDEL & A. VAN WIJNGAARDEN, *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, Syllabus van de Vakantiecursus 1971*, 1974. ISBN 90 6196 092 4.
- MCS 19 A. HORDIJK, R. POTHARST & J.Th. RUNNENBURG, *Optimaal stoppen van Markovketens*, 1974. ISBN 90 6196 093 2.



- MCS 20 T.M.T. COOLEN, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN & E. SLAGT, *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*, 1976. ISBN 90 6196 094 0.
- MCS 21 J.W. DE BAKKER (red.), *Colloquium Programmacorrectheid*, 1975. ISBN 90 6196 103 3.
- MCS 22 R. HELMERS, F.H. RUYMGAART, M.C.A. VAN ZUYLEN & J. OOSTERHOFF, *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; Toepassingen van naburigheid*, 1976. ISBN 90 6196 104 1.
- MCS 23.1 J.W. DE ROEVER (red.), *Colloquium Onderwerpen uit de biomathe-matica, deel 1*, 1976. ISBN 90 6196 105 X.
- MCS 23.2 J.W. DE ROEVER (red.), *Colloquium Onderwerpen uit de biomathe-matica, deel 2*, 1976. ISBN 90 6196 115 7.
- MCS 24.1 P.J. VAN DER HOUWEN, *Numerieke integratie van differentiaalver-gelijkingen, deel 1: Eenstapsmethoden*, 1974. ISBN 90 6196 106 8.
- MCS 25 *Colloquium Structuur van programmeertalen*, 1976. ISBN 90 6196 116 5.
- MCS 26.1 N.M. TEMME (ed.), *Nonlinear analysis, volume 1*, 1976. ISBN 90 6196 117 3.
- MCS 26.2 N.M. TEMME (ed.), *Nonlinear analysis, volume 2*, 1976. ISBN 90 6196 121 1.
- MCS 27 M. BAKKER, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN, S.J. POLAK & M. VAN VELDHUIZEN, *Colloquium Discretiseringsmethoden*, 1976. ISBN 90 6196 124 6.
- MCS 28 O. DIEKMANN, N.M. TEMME (EDS), *Nonlinear Diffusion Problems*, 1976. ISBN 90 6196 126 2.
- MCS 29.1 J.C.P. BUS (red.), *Colloquium Numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*, 1976. ISBN 90 6196 128 9.
- MCS 29.2 H.J.J. TE RIELE (red.), *Colloquium Numerieke programmatuur, deel 2*, 1976. ISBN 90 6196 144 0
- MCS 30 P. GROENEBOOM, R. HELMERS, J. OOSTERHOFF & R. POTHARST, *Effi-ciency begrippen in de statistiek*, . ISBN 90 6196 149 1.
- MCS 31 J.H. VAN LINT (red.), *Inleiding in de coderingstheorie*, 1976. ISBN 90 6196 136 X.
- MCS 32 L. GEURTS (red.), *Colloquium Bedrijfssystemen*, 1976. ISBN 90 6196 137 8.
- MCS 33 P.J. VAN DER HOUWEN, *Differentieschema's voor de berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*, 1977. ISBN 90 6196 138 6.
- MCS 34 J. HEMELRIJK, *Oriënterende cursus mathematische statistiek*, ISBN 90 6196 139 4.
- MCS 35 P.J.W. TEN HAGEN (red.), *Colloquium Computer Graphics*, 1977. ISBN 90 6196 142 4.
- MCS 36 J.M. AARTS, J. DE VRIES, *Colloquium Topologische Dynamische Systemen*, 1977. ISBN 90 6196 143 2.
- MCS 37 J.C. van Vliet (red.), *Colloquium Capita Datastructuren*, 1978. ISBN 90 6196 159 9.

- MCS 38.1 T.H. KOORNWINDER (ED.), *Representations of locally compact groups with applications*, 1979. ISBN 90 6196 161 0.
- MCS 38.2 T.H. KOORNWINDER (ED.), *Representations of locally compact groups with applications*, 1979. ISBN 90 6196 181 5.
- MCS 39 O.J. VRIEZE & G.L. WANROOIJ, *Colloquium Stochastische Spelen*, 1979. ISBN 90 6196 167 X.
- MCS 40 J. VAN TIEL, *Convexe Analyse*, 1979. ISBN 90 6196 187 4.
- MCS 41 H.J.J. TE RIELE (ED.), *Colloquium Numerical Treatment of Integral Equations*, 1979. ISBN 90 6196 189 0.
- MCS 42 J.C. VAN VLIET (RED.), *Colloquium Capita Implementatie van Programmeertalen*, 1980. ISBN 90 6196 191 2.
- MCS 43 A.M. COHEN & H.A. WILBRINK, *Eindige groepen (Een inleidende cursus)*, 1980. ISBN 90 6196 203 X.
- MCS 44 J.G. VERWER (ED.), *Numerical solution of partial differential equations*, 1980. ISBN 90 6196 205 6.
- MCS 45 P. KLINT (RED.), *Colloquium hogere programmeertalen en computer-architectuur*, 1980. ISBN 90 6196 206 4.
- MCS 46.1 P.M.G. APERS (RED.), *Colloquium Databankorganisatie*, 1981. ISBN 90 6196 212 9.
- MCS 46.2 P.M.G. APERS (RED.), *Colloquium Databankorganisatie*, 1981. ISBN 90 6196 232 3.
- MCS 47.1 P.W. HEMKER (ED.), *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, Part I: General information and indices*, 1981. ISBN 90 6196 217 X.
- MCS 47.2 P.W. HEMKER (ED.), *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, Part II: Elementary procedures, algebraic evaluations*, 1981. ISBN 90 6196 217 X.
- MCS 47.3 P.W. HEMKER (ED.), *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, Part III: Linear algebra, part I*, 1981. ISBN 90 6196 217 X.
- MCS 47.4 P.W. HEMKER (ED.), *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, Part IV: Linear algebra, part II*, 1981. ISBN 90 6196 217 X.
- MCS 47.5 P.W. HEMKER (ED.), *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, Part V: Analytical evaluations, analytical problems, part I*, 1981. ISBN 90 6196 217 X.
- MCS 47.6 P.W. HEMKER (ED.), *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, Part VI: Analytical problems, part II*, 1981. ISBN 90 6196 217 X.
- MCS 47.7 P.W. HEMKER (ED.), *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, Part VII: Special functions and constants, interpolation and approximation*, 1981. ISBN 90 6196 217 X.

De met een \* gemerkte uitgaven moeten nog verschijnen.